Scuola di Storia della Fisica
26 Novembre – 1 Dicembre 2007

LE LEGGI DI KEPLERO: PALESTRA CULTURALE DI FISICA E STORIA DELLA FISICA

B.Buonaura
I.S.I.S. " G.ALBERTINI "
Nola, Napoli, Italy
E-mail: bbuonau@tin.it

PREMESSA

Lo scopo di questo lavoro, oltre a fornire una presentazione didatticamente semplice della Gravitazione Universale e di alcune sue conseguenze più famose, le Leggi di Keplero, vuole mettere in evidenza i seguenti punti:

a) Il ruolo fondamentale della simmetria nella comprensione e deduzione delle Leggi Fisiche.
b) Il ruolo fondamentale che assume l'energia, in tutte le sue forme, in Fisica e nelle sue applicazioni.
c) Il ruolo fondamentale che assumono le considerazioni storiche ed epistemologiche nel mettere in migliore luce il valore e i limiti delle Teorie Fisiche.
d) Evidenziare che la Fisica è un'attività umana e,come tale, ha il difetto di sbandierare i successi e di nascondere le difficoltà e i fallimenti. Non si dovrebbe, infatti, mai dimenticare che:
   - dietro alle equazioni di una teoria c'è una enorme struttura qualitativa fatta di risultati empirici, generalizzazioni, ipotesi, scelte filosofiche, condizionamenti storici,gusti personali, convenienze;
   - la correttezza del formalismo matematico non è sufficiente a omologare una struttura scientifica come coerente e non contraddittoria.
   - Le Leggi Fisiche non sono altro che umane ricostruzioni delle proprietà oggettive della materia, e non devono essere intese come imposte da "un creatore" dell'Universo.

INTRODUZIONE

Di seguito verrà assunto il punto di vista *realista*. Cioè sarà ritenuto che la scienza si sia sviluppata sulla base di tre *presupposti*:
1)*l'esistenza di un mondo esterno*, di cui l'osservatore fa parte;
2)*il principio di causalità*;
3)*la regolarità dei fenomeni.*
Inoltre, in particolare, in Fisica saranno ritenute valide le *ipotesi*:
a)*di località* secondo cui l'interazione fra due oggetti tende sempre ad annullarsi al crescere della loro distanza reciproca;
b)*della freccia del tempo* secondo la quale è impossibile che eventi futuri possono modificare il passato. D'altra parte è ragionevole considerare il futuro, almeno in parte, indeterminato e ancora inesistente.

Le descrizioni della Fisica usano due tipi di concetti[1]:

- le entità teoriche: particella, onda e campo (fondamentali); inoltre atomo, protone, elettrone, molecola, ecc;
- le grandezze fisiche: concetti che permettono di descrivere proprietà delle entità teoriche oppure relazioni o interazioni tra le entità teoriche; sono caratterizzate dal fatto di poter essere sottoposte a misura.

Per misura si intenderà quell'insieme di procedure sperimentali che permettono di attribuire ad una grandezza fisica usata da una teoria un valore definito, esprimibile mediante un numero accompagnato da un margine di errore.
Per sistema fisico sarà inteso un'entità teorica o raggruppamenti di entità teoriche: particelle elementari, atomi, molecole, campi d'interazione, oggetti macroscopici, pianeti, stelle, galassie, ecc. oggetto di studio.
Qualunque fenomeno fisico (o sistema fisico), per essere soggetto a indagine, deve essere descritto in termini di misure di grandezze fisiche (osservabili), di relazioni fra queste (leggi fisiche) . In particolare, sono importanti le relazioni tra le osservabili e il tempo perché attraverso queste è possibile introdurre la nozione di evoluzione dei sistemi fisici.
Come è noto, nello studio dei fenomeni fisici si rivela di notevole importanza la nozione di Sistema di Riferimento (brev. Riferimento). Esso designa l'insieme delle strutture materiali necessarie e sufficienti a consentire le osservazioni e le misure che dobbiamo impiegare nello studio del sistema (del fenomeno). In termini semplici, si può pensare "riferimento" come sinonimo di "laboratorio": prima di tutto sarà un riferimento spazio-temporale, ossia una struttura (corpo rigido) che consenta di stabilire le posizioni delle parti del sistema, e di uno o più orologi. Ma non basta: nel concetto di riferimento includiamo anche tutti gli strumenti necessari per misurare cariche, campi, temperature, frequenze, e in generale tutte le osservabili che possono intervenire nel fenomeno.
Un Riferimento non va confuso con un sistema di coordinate: mentre quest'ultimo è un elemento della descrizione matematica, il Riferimento è un concetto fisico.
Infine, Il concetto di stato di un sistema fisico, essenziale in meccanica quantistica, ma che è impiegato comunemente in meccanica classica e in termodinamica, è l'astrazione dell'insieme delle informazioni (ad es. valori di osservabili) che sono necessarie e sufficienti a caratterizzare il comportamento del sistema. Conviene parlare di "astrazione" per sottolineare che lo stato non coincide con i valori delle osservabili che lo individuano: queste infatti possono essere scelte in più modi equivalenti, per uno stesso stato. Altra osservazione: lo stato così definito è inteso a un dato istante; in generale dunque lo stato dipenderà dal tempo.

1. TRASFORMAZIONE E CONSERVAZIONE

Una delle scoperte scientifiche più importanti è che nel nostro Universo vi è evoluzione, trasformazione, movimento. Tuttavia, nessun processo naturale si presenta come puro e assoluto cambiamento e non avviene mai una trasformazione di un sistema fisico in un altro di natura radicalmente diversa. Infatti, in ogni cosa che muta e che si trasforma vi sono degli invarianti: aspetti che non cambiano e che permettono di riconoscere quella cosa, anche a trasformazione avvenuta. I soli concetti di movimento e trasformazione non bastano a caratterizzare un processo, ma occorre usare anche i loro opposti: l'immutabilità e la conservazione.
La Fisica ha dato a queste considerazioni una base rigorosa, scoprendo quelle grandezze fisiche che restano costanti in tutti fenomeni naturali: l'energia, la quantità di moto, il momento angolare, la carica elettrica, ecc.

[1] **G. Giuliani**: Misure e realtà- Le grandezze fisiche e la loro misura. – La Goliardica Pavese - Pavia 1988

E' emerso un quadro dove la grandezza fisica energia è la più importante di tutte fondamentalmente per due ragioni:

a) concettuale, infatti l'energia costituisce l'essenza stessa delle trasformazioni. La scoperta di Einstein dell'equivalenza massa – energia ha reso ancora più evidente la "concretezza" dell'energia;
b) pratica, infatti il controllo delle sorgenti energetiche assicura all'uomo la possibilità di piegare i processi naturali alle sue esigenze.

La conservazione dell'energia in un sistema fisico richiede che questo sia isolato, invece, la conservazione della quantità di moto e del momento angolare richiede la condizione, meno restrittiva (almeno in prima approssimazione), che il sistema fisico sia chiuso (la somma delle forze esterne e dei corrispondenti momenti sia nulla).
Se si esamina attentamente la Storia della Fisica si scopre che le leggi di conservazione, fino ad ora, hanno uno status speciale: sono sopravvissute alle singole teorie.
La formulazione di una qualunque teoria fisica, che voglia essere coerente con i fatti sperimentali, deve contenere al proprio interno delle leggi di conservazione: senza invarianti, è impossibile formulare una teoria fisica coerente.
Le leggi di conservazione, a differenza delle altre leggi della fisica, delimitano l'esperienza possibile: se un processo è contrario alle leggi di conservazione non si verificherà con certezza; se un processo non è in contrasto con le leggi di conservazione avrà una probabilità di verificarsi, anche se in passato non si è verificato.
Ma perché l'energia, la quantità di moto e il momento angolare si conservano? L'unica risposta nota deriva da un importantissimo teorema della fisica matematica: *il TEOREMA DI NOETHER*[2].
Secondo questo teorema ogni trasformazione matematica che lascia invariate le equazioni fondamentali della Fisica implica l'esistenza di una o più grandezze fisiche che debbono essere conservate, cioè restare invariate in ogni processo che coinvolge un sistema fisico isolato.
Infatti le equazioni fondamentali della Fisica restano invariate se:

- si aggiunge una costante al tempo (*omogeneità del tempo*) $\rightarrow$ CONSERVAZIONE ENERGIA;
- si aggiunge un vettore costante alla posizione di tutti gli oggetti costituenti un sistema fisico (*omogeneità dello spazio*) $\rightarrow$ CONSERVAZIONE QUANTITA' DI MOTO
- si ruota di un angolo i vettori posizione di tutti gli oggetti costituenti un sistema fisico (*isotropia dello spazio*) $\rightarrow$ CONSERVAZIONE MOMENTO ANGOLARE.

Le equazioni fondamentali della Fisica danno una descrizione dettagliata dei processi, le leggi di conservazione, invece, precisano quali processi sono proibiti e quindi non avvengono in natura. Ad esempio un sistema fisico in quiete non può muoversi solo per effetto della sua energia interna.
La Seconda Legge di Keplero è una conseguenza della conservazione del momento angolare. Inoltre, nelle Leggi di Keplero è costante l'energia meccanica del sistema dei corpi considerato.

2. SIMMETRIA

Strettamente legata al concetto di Trasformazione e a quello di Conservazione, è la nozione di Simmetria.
Fin dall'antica Grecia la parola Simmetria richiama il concetto di Armonia. Una distribuzione di oggetti, o di parti di un oggetto, che risulta ordinata, armonica, rispetto a un qualche elemento geometrico: un punto, una linea, un piano. Spesso la parola Simmetria

[2] **Emmy Noether** (1882 – 1935) *"Invariante Varlationsprobleme"*

ha anche un altro significato: quello di parti simili che si contrappongono, come nel caso della mano sinistra e della mano destra.
Una cosa è simmetrica se è possibile cambiare in essa qualche cosa lasciandone immutato l'aspetto (Hermann Weyl, 1952).
Pertanto la Simmetria richiede una Trasformazione e un Invariante sotto quella trasformazione.
Le leggi della Geometria Euclidea sono,ad esempio, invarianti per Traslazione e Rotazione.
Traslazioni e Rotazioni sono tutte (e sole) le trasformazioni che lasciano invariata la distanza tra due punti.
Le Trasformazioni che si ottengono componendo Rotazioni e Traslazioni formano un Gruppo di Trasformazioni, detto GRUPPO EUCLIDEO.

Un insieme di Trasformazioni forma un Gruppo se:
1. la composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione
2. per ogni trasformazione esiste una trasformazione “inversa", cioè tale che quando viene composta con la trasformazione si ottiene la trasformazione identica.

F. Klein nel 1872, nel suo discorso inaugurale di professore all'Università di Erlangen, descrisse la Geometria come lo studio delle proprietà delle figure aventi carattere invarianti rispetto ad un particolare Gruppo di Trasformazioni.

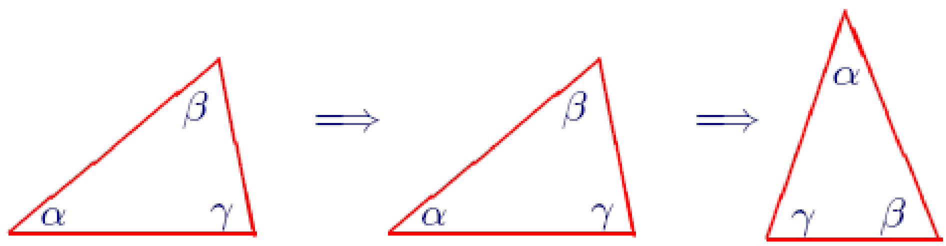


Fig.1

Questo specifico concetto di Simmetria si è imposto in vari settori della scienza: cristallografia, chimica, fisica.
In fisica, E. Castellani[3] distingue tra
1. Simmetrie di oggetti: Simmetria rotazionale di circa 60° di un fiocco di neve. Scambio di particelle identiche, o di atomi identici
2. Simmetrie di leggi: Le leggi che descrivono l'evoluzione del fenomeno sono invarianti per un gruppo particolare di trasformazioni.
3. Simmetrie di principi: Le leggi della fisica devono avere una precisa forma (un esempio famoso è il Principio di Relatività).

3. OMOGENEITA' E ISOTROPIA DELLO SPAZIO

Omogeneità e isotropia dello spazio e uniformità del tempo sono i concetti di base del Teorema di Noether. E' opportuno dunque una riflessione .
Un sistema fisico si dice *omogeneo* se ha in ogni suo punto uguali proprietà fisiche e chimiche, ed è *isotropo* se in ogni punto una stessa proprietà (vettoriale) vale indipendentemente dalla direzione lungo cui si guarda. Ad esempio un gas contenuto in un recipiente in condizioni di equilibrio (temperatura, pressione e volume costanti), è omogeneo ed isotropo: la sua densità `e in ogni punto costante, e un raggio di luce o

[3] **Katherine Brading and Elena Castellani** - Symmetries and invariances in classical physics - 2005

un'onda sonora che in qualunque direzione lo attraversino, procedono secondo linee rette, e impiegano lo stesso tempo a percorrere la stessa distanza.
Come si fa allora a *distinguere* i punti dello spazio, se esso è omogeneo? Come si fa a *distinguere* due direzioni nello spazio, se esso è isotropo? Si richiama l'attenzione sul verbo *distinguere*: Vuol dire percepire come diversi degli oggetti, tipicamente dei punti, nello stesso istante o anche a istanti diversi?
La prima intuizione di questa difficoltà *del distinguere nell'uniforme* la troviamo nella *Divina Commedia,* quando, nel ventisettesimo canto del *Paradiso,* Dante sale dal cielo delle Stelle Fisse, l'ottavo, al nono, il Cristallino, o Primo Mobile; questo, a differenza del precedente che è popolato di stelle (poco più di un migliaio, secondo Dante), ne è invece completamente privo; è altresì pieno d'etere (cfr. Par., XXVII, v. 70) e quindi del tutto uniforme, ancorché «velocissimo».

E la virtù che lo sguardo m'indulse,
del bel nido di Leda mi divelse,
e nel ciel velocissimo m'impulse.

Le parti sue vivissime ed eccelse
sì uniforme son, ch'i' non so dire
qual Beatrice per loco mi scelse.

(Par., XXVII, vv. 97-102)

Lo sguardo straordinario di Beatrice solleva dunque Dante dal luogo dov'era, nella costellazione dei Gemelli (Castore e Polluce, nati da Leda), fino al Primo Mobile, sulla cui velocità Dante si sofferma anche nel *Convivio* (II, 3): il Primo Mobile è completamente «diafano» e trasparente, esso non contiene nulla di materiale, e la sua presenza è necessaria, come spiega Dante nel *Convivio* (II, 14), per dar ragione del ciclo di ventiquattr'ore che scandisce il quotidiano sorgere e tramontare di Sole, pianeti e stelle. Quel che più qui interessa è ovviamente che esso è completamente indifferenziato, e non si può quindi in esso distinguere un luogo dall'altro; si potrebbe obiettare che questa sua totale uniformità dovrebbe impedire altresì di rilevarne alcun moto; quest'obiezione non sfiora però Dante, che ripete nel *Convivio* che il suo moto è così veloce da essere incomprensibile, anche perché questo moto (che ha l'effetto detto di produrre l'alternanza del giorno e della notte) ha una precisa causa: il grande desiderio che questo cielo, o meglio le Intelligenze che lo muovono, hanno di ciò che le circonda, ovvero dell'Empireo, praticamente coincidente con l'abbraccio di Dio stesso.
Lo stesso problema lo pone, ma con una diversa soluzione, il racconto *Un segno nello spazio* di Calvino che appartiene a quella parte delle *Cosmicomiche* che riguarda le avventure del palindromo, e assai longevo, Qfwfq. Qfwfq infatti intende far qualcosa per rompere la simmetria e l'uniformità che sembrano inerenti ai punti dello spazio[4].
La Fisica del Novecento ha optato per una teoria atomistica della materia, per una struttura non continua ma discreta. All'interno di ogni sostanza ci sono molti spazi "*vuoti* ", tutti quelli non occupati dagli atomi che la compongono. *Nessun materiale è quindi letteralmente omogeneo e isotropo*, almeno che non si precisa su volumi molto grandi rispetto a quelli di un atomo.
La Fisica, si sa, tende a generalizzare ed estendere il significato di certi termini: l'omogeneità e isotropia viene attribuita anche allo *spazio vuoto*.

[4] **Antonio Sparzani** – Relatività, quante storie. – Bollati Boringhieri 2003 pagg. 88 - 89

L'estensione di significato però non è banale. Non basta infatti dire che "*tutti i punti dello spazio sono uguali*", o che "*tutte le direzioni sono uguali*". Più precisamente, supporre lo spazio *vuoto* omogeneo significa supporre che le leggi del moto, per un dato sistema fisico isolato, non dipendono dalla posizione dello stesso sistema nello spazio (*simmetria traslazionale*). Analogamente, richiedere che lo spazio sia isotropo significa richiedere che le leggi del moto siano invarianti per rotazioni, ovvero se si ruota tutto il sistema fisico rispetto ad uno o più assi del sistema di riferimento, le equazioni del moto non mutano (*simmetria rotazionale*).
Quindi:
L'omogeneità dello spazio implica che le leggi della fisica devono essere indipendenti dal luogo in cui vengono misurate e viceversa.
E' importante e doveroso sottolineare che non sempre quello che oggi sembra scontato è stato ritenuto tale, anzi per molti secoli si è avuta una concezione completamente diversa delle leggi fisiche.
La teoria del moto di Aristotele era fondata sull'esistenza di luoghi naturali, cioè di luoghi privilegiati nell'Universo. Il luogo naturale dei corpi pesanti era, ad esempio, il centro della Terra, mentre quello dei corpi celesti era al di sopra dell'orbita lunare.
E' come dire che le leggi della fisica sono diverse a seconda che si faccia degli esperimenti in casa, o al centro della Terra o sulla Luna. Secondo Aristotele, una pietra a casa cade verso il pavimento, al centro della Terra sta ferma e sulla Luna non ci può arrivare.
Il grande contributo dato da Giordano Bruno, Galileo Galilei e Isaac Newton alla scienza moderna è proprio quello di aver ribaltato il punto di vista di Aristotele: credere, ma anche adducendo prove sperimentali, che le leggi della fisica fossero uguali dappertutto nell'Universo, che non esistesse separazione tra materia celeste e materia terrestre.

4. UNIFORMITA' DEL TEMPO

Se si ripete per il tempo ciò che si è detto per i punti dello spazio, cioè che "*tutti gli istanti temporali sono uguali*" significa che il sistema fisico è governato dalle stesse leggi se l'esperimento è ripetuto in un altro momento (*simmetria temporale*). Le leggi fondamentali della fisica non distinguono tra *passato* e futuro.
L'uniformità del tempo implica che le leggi della natura sono le stesse ieri, oggi e domani, cioè sono le stesse indipendentemente da quando sono misurate.
Sul ruolo dell'omogeneità del tempo occorre fare delle precisazioni.
Ciascuno di noi ha un'idea intuitiva della nozione di tempo, come qualcosa che "scorre" dal passato verso il futuro. Questa concezione nasce essenzialmente dal fatto che si osservano dei fenomeni naturali che consistono nella continua creazione, modificazione ed evoluzione di strutture. Gli stessi esseri umani sono un processo di questo tipo. Ciò suggerisce non soltanto l'idea di una serialità continua necessaria per la descrizione dei fenomeni, ma anche che questa serialità abbia una direzione, cosa che si esprime parlando di una *freccia del tempo*.
La controversa questione della *freccia del tempo* può porsi in questi termini: andare avanti o indietro sull'asse temporale è come andare avanti o indietro in una direzione spaziale? La risposta non è così ovvia come può sembrare a prima vista. È chiaro che si può sempre tornare al punto di partenza ma non si può "tornare" a due giorni fa. Scriveva Einstein il 21 marzo 1955, a pochi mesi dalla sua morte, ai familiari di Michelangelo Besso, con il quale aveva vissuto una lunghissima amicizia basata sulle comuni passioni per la musica e per i problemi epistemologici: «... E ora egli mi ha preceduto soltanto di poco nel dire addio a questo strano mondo. Ciò non significa niente per noi fisici, convinti che la distinzione tra passato, presente e futuro sia soltanto un'illusione, anche se ostinata». Per

comprendere bene cosa intendesse Einstein affermando che la distinzione tra passato e futuro è illusoria, bisogna introdurre una distinzione tra i fenomeni fisici e le leggi che li descrivono. Le leggi di Newton,per la meccanica classica, le equazioni di Maxwell per la teoria elettromagnetica, quelle della relatività generale di Einstein per il campo gravitazionale, le equazioni di Schroedinger, di Klein-Gordon e di Dirac in fisica quantistica: tutte rimangono inalterate se invertiamo la direzione del tempo, se sostituiamo la coordinata *t* con (-*t*). È semplicemente questo che si intende quando si afferma che le leggi della fisica sono reversibili nel tempo e pongono su un piano di perfetta parità il passato ed il futuro. Ma ciò altro non è che una verifica matematica del ben noto principio di omogeneità del tempo che abbiamo già brevemente esaminato. Questa caratteristica delle leggi fisiche, di poter essere usate indifferentemente in ogni punto dell'asse del tempo, non deve assolutamente sorprenderci, visto che sono state costruite proprio su questa richiesta fondamentale. Le leggi fisiche mirano ad estrarre, per così dire, l'essenza strutturale di un fenomeno, tralasciandone gli aspetti particolari e contingenti.
Il fatto è che nei processi reali del mondo fisico c'è molto di più di quanto non ci sia in quelle loro immagini stilizzate che sono le leggi. Innanzitutto proprio quegli aspetti "particolari e contingenti" giocano un ruolo chiave nell'uso delle leggi per la descrizione e la previsione dei fenomeni. Come è noto, le *condizioni iniziali ed al contorno* costituiscono proprio l'informazione relativa alle caratteristiche peculiari di un processo fisico che è necessario "immettere" nell'espressione della legge per ricavarne la storia dinamica. Data una completa descrizione del campo gravitazionale e note le masse in gioco, è impossibile descrivere la traiettoria di un asteroide senza assegnare posizione e velocità di questo ad un istante dato relativamente ad un osservatore. Un pendolo può essere messo in oscillazione dando un colpo da destra verso sinistra o viceversa, ad un preciso istante. Le leggi fisiche descrivono *classi di fenomeni* e non processi particolari. Per questo è necessario disporre di una maggiore quantità di informazione costituita proprio dalle condizioni iniziali e queste ultime *non sono simmetriche nel tempo*: si presentano in quel preciso modo ed in quel preciso istante. Sostituire *t* con (- *t*) in un'equazione fondamentale della fisica equivale a qualcosa di analogo al proiettare un film al contrario, ma questo non autorizza minimamente ad affermare che la distinzione tra prima e poi è una mera illusione! Sempre restando nel campo della meccanica classica è possibile spingere più avanti la linea di ragionamento e mostrare che anche le *misure* di un fenomeno, ossia la registrazione di un evento particolare all'interno di un processo, non sono simmetriche nel tempo come le leggi che lo descrivono. Disponendo della legge di gravitazione universale di Newton (e possibilmente di un personal computer) è possibile non soltanto prevedere tutte le eclissi totali di Sole da qui all'anno 3000 d.C., ma anche retrodire tutte quelle già verificatesi fino al 3000 a.C. (cosa che effettivamente viene spesso fatta per migliorare la datazione di alcuni antichi documenti nei quali si fa accenno a questo tipo di fenomeni astronomici). Però non è possibile avere *oggi* una fotografia dell'eclisse del remoto passato o del lontano futuro. Per di più, questa stupefacente possibilità di dedurre l'intera storia dinamica di un fenomeno a partire dalla legge e da un set di condizioni iniziali è soggetta a fortissime limitazioni pratiche e di principio.
Soltanto nel quadro determinista della fisica classica si suppone che possano essere assegnate le condizioni iniziali con precisione virtualmente illimitata. Ma nella recente fisica del caos, per via del cosiddetto "effetto farfalla", cioè dell'amplificazione non-lineare degli errori nelle misure, si introduce una decisiva incertezza nelle condizioni iniziali, per cui non possiamo mai realmente fare previsioni deterministiche, ma soltanto stocastico-probabilistiche. Le previsioni deterministiche sono possibili soltanto nelle situazioni semplificate della fisica classica lineare, come il pendolo senza attrito o il problema dei due corpi in presenza di forze centrali. In definitiva quando si effettua il confronto con la reale complessità dei fenomeni naturali, la capacità di guardare indifferentemente nel

passato e nel futuro a causa delle descrizioni teoriche è fortemente limitata. Riprendendo il caso del sistema solare, che è un problema di molti corpi in un campo centrale, si può in effetti fare le previsioni delle eclissi fino all'anno 3000, ma se si considera l'intero sistema nella sua enorme complessità (e non soltanto il sistema terra-luna, come si fa in questo genere di previsioni) non si può assolutamente essere certi della sua stabilità; in altre parole, può benissimo darsi che si "sfaldi" e si "logori" e che nel 3000, o prima, il sistema planetario a cui apparteniamo non ci sarà più!
Anzi, l'esperimento di Ginevra, Cplear, introduce una asimmetria tra passato e presente nel mondo delle particelle. Condotto per parecchi mesi su uno dei grandi acceleratori del centro di ricerche europeo utilizzando fasci di kaoni e le loro "antiparticelle" - , Cplear ha dimostrato sperimentalmente che il tasso al quale gli antikaoni si trasformano in kaoni è lievemente diverso dal suo inverso, ossia dal processo speculare nel tempo. E' stata la prima volta che è stata osservata una microscopica "freccia del tempo", che getta una nuova luce sulle simmetrie (e sulle loro violazioni spontanee) sulle quali è costruita l'immagine moderna della fisica della natura.
Si può dunque affermare che non soltanto i fenomeni naturali sembrano essere intrinsecamente irreversibili nel tempo, permettendoci così di sostenere la concezione di una intrinseca freccia del tempo anche per i processi più semplici, ma anche una ineliminabile imprevedibilità nel futuro dei sistemi complessi e quantistici.

5. SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI

Ma quali sono i Sistemi di Riferimento (SR) in cui sono ritenute vere le Leggi della Fisica ?
Per poter scegliere davvero una classe di SR da ritenere, provvisoriamente, privilegiati, occorre fare delle ipotesi già abbastanza impegnative sulla natura delle leggi che regolano il moto dei corpi ovvero sul come questo dipenda dalle cause che lo producono.
In realtà la scelta della classe dei SR ritenuti privilegiati deriva da un'altra scelta. E' una scelta causale per il moto.
Nella Storia della Fisica si sono presentate due scelte:
1. trovare una causa per il *cambiamento di posizione*;
2. trovare una causa per il *cambiamento di velocità*.
La fisica di Aristotele richiedeva proprio quanto affermato al punto 1., mentre la fisica di Newton ritiene di dover trovare una causa solo se c'è un mutamento di velocità.
E' da sottolineare che il significato più importante della seconda legge della dinamica è proprio questo, che le cause del moto (le forze) determinano le accelerazioni dei corpi, cioè appunto le loro variazioni di velocità. Il moto con velocità costante, cioè il *moto rettilineo uniforme* non è da spiegare, è frutto della pura inerzia: sul corpo nulla agisce e dunque esso mantiene il suo stato - specificando bene che con «stato» si intende stato di moto rettilineo uniforme, perché per esempio uno stato con accelerazione costante non verrebbe affatto mantenuto in assenza di forze.
Il SR per il quale un corpo non soggetto a forze mantiene, per inerzia, la sua velocità è detto Sistema di Riferimento Inerziale (SRI). E' il SRI in cui sono ritenute vere le Leggi della Fisica.
Ma esiste davvero un SRI? Affermare che $\Im$ è un SRI equivale a aver stabilito che in esso un corpo *non soggetto a forze* si muove, *per inerzia*, di moto rettilineo e uniforme. Ma ciò presuppone che sia nota una *nozione primitiva* di forza in base alla quale si possa stabilire, *indipendentemente*, se c'è una forza che agisce oppure no.
Tuttavia le forze *non si "vedono", si "vedono"* i loro effetti! Jammer ha mostrato nella sua Storia del Concetto di Forza[5] che in realtà la seconda "legge" di Newton è la definizione

[5] **Max Jammer** Storia del Concetto di Forza – Collana di Storia della Scienza -Feltrinelli

della forza, in generale: tranne cioè in casi molto particolari in cui la forza può essere definita a parte.
Un modo per evitare il circolo vizioso e dare un significato *indipendente* all'affermazione
" *un corpo non soggetto a forze* " è ricorrere ad un'ipotesi molto generale, di *natura induttiva* sulla " *realtà* ": Tutte le forze tra corpi di qualsiasi tipo esse siano *diminuiscono con l'aumentare* della distanza. Questa ipotesi è nota anche con il nome di " ipotesi di località ". Ad esempio, se una particella è osservata in laboratorio, un'altra particella della stessa natura distante una decina di metri dalla prima (distanza enorme su scala atomica) non acquista nessuna nuova proprietà.
Tutte le interazioni note tendono a zero con il tendere all'infinito della distanza tra gli oggetti interagenti. Le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche tendono a zero proporzionalmente a r^{-2}, mentre le interazioni forti e quelle deboli decrescono ancora più rapidamente proporzionalmente a e^{-kr} . *Escludendo perciò le congetture ad hoc sulle interazioni di quark di intensità crescente al crescere della distanza*, è possibile concludere che nessuna interazione nota è in grado di violare l'ipotesi di località.
Pertanto, con il conforto del buon senso, è possibile adottare questa ipotesi di località traendone la conseguenza che *un corpo non soggetto a forze è molto lontano da tutti gli altri corpi*.
Allora la definizione di SRI è la seguente:
Un SR si dice inerziale quando, in esso, un corpo molto lontano da altri corpi esegue un moto rettilineo e uniforme.
E successivamente l'affermazione della sua esistenza:
Esiste almeno un SRI.
Premesso che un SRI può non essere ancorato ad una particella elementare, atomo, molecola,ecc. ma essere posizionato in particolari punti dello spazio (ad esempio nel Centro di Massa di un sistema di corpi),bisogna dire che la ricerca di un SRI avviene mediante *un processo di approssimazioni successive*, tipico della Fisica.
Cioè nella pratica vengono utilizzati SR che sono *solo approssimativamente* inerziali (ad esempio il laboratori sulla superficie terrestre), ma l'approssimazione connessa con questo tipo di definizioni è sempre implicita nelle affermazioni della Fisica sulla realtà.
Ad esempio, la superficie terrestre è un riferimento inerziale?
Un corpo fermo, lasciato libero, cade! Tuttavia è noto che ciò è dovuto alla presenza della forza di gravità. Appoggiando il corpo su un piano, la forza di gravità è cancellata dalla reazione vincolare: per movimenti del corpo sul piano orizzontale dovrebbe valere allora il principio d'inerzia; eppure non è così, perché il corpo, lanciato in direzione orizzontale, tende a rallentare fino a fermarsi per effetto della forza d'attrito. È necessario ridurre l'attrito fino a renderlo trascurabile, eseguendo l'esperimento sul ghiaccio o su una tavola a cuscino d'aria, per poter finalmente osservare il moto rettilineo uniforme del corpo, in accordo col principio d'inerzia. E' possibile pensare di aver raggiunto l'evidenza sperimentale che la superficie terrestre costituisca un riferimento inerziale. In realtà non è così, perché la Terra ruota su se stessa e devono quindi comparire delle forze apparenti, come la forza centrifuga, la stessa che ci spinge verso l'esterno di una giostra in movimento. La forza centrifuga è massima all'equatore, dove è diretta in senso opposto alla forza peso, ed è nulla al polo, posto sull'asse di rotazione terrestre: ebbene, il peso dei corpi all'equatore deve risultare quindi un po' inferiore di quello misurato al polo. Questa differenza di peso è dell'ordine del 3 per mille, 180 grammi per una persona di 60 kg, una quantità facilmente misurabile con una bilancia di precisione.
È interessante sapere che è possibile sfruttare l'esistenza delle forze apparenti per annullare (localmente) l'effetto della forza di gravità: è l'assenza di peso che si esperimenta nei satelliti artificiali in orbita intorno alla Terra: in essi si può osservare in pratica il moto rettilineo uniforme dei corpi liberi, senza più bisogno di compensazioni. Il

satellite stesso mantiene la propria orbita senza intervento di motori proprio grazie all'uguaglianza tra la forza di gravità e la forza centrifuga.
Gli astronauti che sono nel satellite, che - beninteso - sta viaggiando a razzi spenti, se avessero perso memoria della loro storia passata e del loro lancio, non avrebbero modo di pensare di essere soggetti a qualche forza: guardando dall'oblò vedrebbero Terra, Luna e altri corpi celesti ruotare intorno a loro, ma nel loro ambiente tutto galleggerebbe nell'aria, tutto fluttuerebbe, tutto sembrerebbe *libero da forze;* al massimo, se fossero dotati di strumenti di misura estremamente precisi, potrebbero accorgersi della (debolissima) attrazione gravitazionale che si esercita tra i corpi presenti nel satellite.
Una volta stabilita l'esistenza di sistemi di riferimento inerziali, qualunque altro sistema di riferimento che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad uno di essi deve essere esso stesso inerziale.
E' stato un lungo cammino quello che da Newton in poi ha permesso di trovare una ragionevole formulazione delle sue leggi fondamentali. L'apparente fragilità dell'approccio epistemologico scompare non appena si considera sua giustificazione *a-posteriori*, sul fatto, cioè, della capacità predittiva e applicativa senza precedenti.
L'acquisizione della consapevolezza che tutti i sistemi di riferimento inerziali sono abilitati alla descrizione della realtà offerta dalla meccanica classica, non passa facilmente dal livello formale-teorico al livello di dato di coscienza. Galileo, che anche dal punto di vista formale era ancora lontano da questa consapevolezza, dice che il moto «è come s'e' non fusse», non che «non è», o che dipende dal sistema di riferimento usato[6].
Il punto di vista davvero nuovo che occorre un po' alla volta - e con fatica - interiorizzare per abbracciare la relatività connaturata con la meccanica classica, è che non ha senso in alcun caso dire che qualcosa si muove o è in quiete senza riferirsi a qualcos'altro che sia, per convenuta definizione, assunto come fermo, senza cioè riferirsi a un SR: quando si dice «*il Sole sta fermo*», l'affermazione non è né vera né falsa, è semplicemente priva di senso; se si dice invece «*rispetto a un SR fissato sul Sole il Sole è fermo*», l'affermazione è magari un po' ovvia, ma certamente dotata di senso e vera.
Così, l'affermazione «*la Terra si muove* (di un certo tipo di moto, ellittico ecc.) *rispetto al Sole*», è dotata di senso e vera; e analogamente l'affermazione «*il Sole si muove* (di un certo tipo di moto, ellittico ecc.) *rispetto alla Terra*», è ancora dotata di senso e vera.
Questo forse può stupire: come se una delle conseguenze della rivoluzione scientifica, che prese concretamente le mosse proprio dall'istanza eliocentrica di Copernico in opposizione a quella geocentrica di Tolomeo, fosse che le due affermazioni sono in realtà egualmente vere, pur di riferirle all'opportuno punto di vista (SR). In realtà, ironia della storia, è proprio un po' così, anche se con una postilla molto significativa, che rende conto della differenza oggettiva esistente tra i due rispettivi SR. La differenza è semplicemente che il SR fissato sul Sole è un sistema di riferimento inerziale, mentre quello centrato sulla Terra non lo è, o, meglio ancora, quello centrato sul Sole è molto «*più inerziale*» di quello centrato sulla Terra, e ciò sostanzialmente non per un qualche privilegio (letteralmente) astrale, ma semplicemente perché *il Sole ha una massa molto ma molto maggiore di quella della Terra* (più di trecentomila volte); di nuovo dunque una questione di approssimazione: infatti, se volessimo fare i pignoli, anche considerando il solo sistema Terra-Sole, e prescindendo quindi dalla presenza di tutto il resto del sistema solare, ci accorgeremmo che il centro del Sole non costituisce l'origine di un SRI, ma questo ruolo importante è ricoperto da un punto situato sulla retta congiungente Terra-Sole, distante dal centro del Sole circa 450 km, e collocato dunque sotto la sua superficie (il raggio del Sole e dell'ordine di 700000 km). Ecco dunque dove sta tutto il senso della millenaria disputa geocentrico-eliocentrica; dal punto di vista dei puri fenomeni astronomici, inquadrati

[6] **Antonio Sparzani** – Relatività, quante storie. – Bollati Boringhieri 2003 pag.157 e seguenti

nell'ambito della meccanica classica, si tratta del fatto che un SR centrato (approssimativamente) sul Sole è migliore dell'altro, quello centrato sulla Terra, perché esso è inerziale e quindi gode di alcuni privilegi, di semplicità ed eleganza formale delle leggi della fisica scritte in esso rispetto a quelle che venissero scritte in un altro SR non inerziale (come quello della Terra).
Come si vede, alla luce di queste riflessioni, poco senso ha chiedersi se allora, in verità, è il Sole che gira attorno alla Terra o questa che gira attorno al Sole: la fisica per sé non ha nulla da dire a questo riguardo, la fisica insegna a quali leggi sono soggette *le distanze tra i corpi che si muovono - relativamente - nello spazio.*
Mentre l'atteggiamento di Galileo, riassunto spesso in quell'«*eppur si muove*!» forse mai pronunciato e pur così significativo della sua posizione, non è dunque affatto relativistico, ironia vuole che lo sia molto di più quello di coloro che non vollero comunque accreditare di verità assoluta un'opinione all'epoca così eterodossa come quella eliocentrica; nello stesso spirito con cui i cardinali Bellarmino e Barberini suggerirono per tempo che se Galileo avesse parlato «*come matematico*» o «*in via di pura ipotesi*» non avrebbe avuto a subire guaio alcuno.
È appena il caso di menzionare il fatto che la rivoluzione copernicana non è certo consistita prevalentemente nell'ipotesi eliocentrica piuttosto che geocentrica, ma che tutto il movimento di pensiero che ha caratterizzato i due secoli che hanno seguito la proposta di Copernico, ha portato avanti istanze che altro avevano da dire sull'emancipazione dell'uomo e sul suo ruolo nel mondo.

6. LA SINCRONIZZAZIONE DEGLI OROLOGI IN UN SRI

Il problema della sincronizzazione degli orologi, comunemente creduto di facile risoluzione, si è storicamente rivelato di formidabile complessità e di fondamentale importanza.
Le Leggi della Fisica, per poter essere espresse, richiedono sia misurazioni di intervalli di tempo in uno stesso luogo di un SRI (*valutazione eseguibile con un solo orologio*), sia la misurazione di intervalli di tempo in luoghi distinti di un SRI (*valutazione eseguibile con due orologi posizionati in punti diversi del riferimento*). Un SRI deve essere dotato di orologi in ogni punto dello spazio. Lo studio del moto,infatti, comporta misure temporali effettuate in punti diversi dello spazio. Come esempio, si consideri la misura della velocità media di una particella, per eseguire tale misura è necessario compire 2 osservazioni in 2 punti e in 2 istanti differenti:

- passaggio della particella nel punto 1 all'istante t_1;
- passaggio della particella nel punto 2 all'istante t_2.

Sono dunque necessari, in questo caso 2 orologi (identici), che devono essere *sincronizzati*.
Per poter parlare delle misurazioni del tempo in posti differenti di *uno stesso* SRI si devono, dunque, *sincronizzare* i vari orologi distanti. Ma come? E ancora prima: Cosa dobbiamo intendere per orologio?
Nel linguaggio di ogni giorno si definisce orologio ogni strumento capace di indicare il temo e misurare la durata di un processo qualunque sia la natura (fisica, chimica, biologica, economica, ecc.). Max Von Laue[7] distingue in tutti gli *orologi macroscopici*, inventati e costruiti dagli uomini, tre elementi fondamentali:

- *la parte vibrante*: il periodo costante di vibrazione di questo elemento serve proprio a misurare il tempo;
- *la sorgente di energia*: energia elastica, energia gravitazionale, energia elettrica;

[7] **M. Von Laue** – *Geschichte der Physik* –Ullstein – Berlin 1966

- *il meccanismo regolatore*: trasporta l'energia dalla sorgente alla parte vibrante.

Tuttavia in fisica, per misurare il tempo, ci si avvale anche di vari processi naturali macroscopici (moto dei corpi celesti) e microscopici (periodo della radiazione emessa dagli atomi).

Einstein, spesso, ha dato un certo numero di definizioni generali di quei processi fisici che possono essere utilizzati come orologi. Se ne riportano tre:

- *Un orologio è una cosa che è caratterizzata da un fenomeno che ripassa periodicamente per le stesse fasi, in modo tale che siamo obbligati ad ammettere –sulla base del principio di ragion sufficiente- che tutto quello che accade durante un dato periodo sarà identico a tutto quello che accadrà in qualsiasi altro periodo*[8]*.*In una nota aggiunse: *Un orologio perfetto definito a questo modo svolge lo stesso ruolo nelle misura del tempo di un corpo solido perfetto nella misura della lunghezza*.[9]
- *Noi intendiamo come orologio qualcosa che fornisce delle successioni di eventi che possono essere contati*[*….*] *Un orologio è anche un corpo o un sistema con la proprietà addizionale che le successioni di eventi di cui è composto formano degli elementi considerati uguali*.[10]
- *Un processo fisico qualsiasi può servire da orologio, purché possa venir ripetuto con esattezza tante volte quante vogliamo. Scegliendo come unità di tempo fra l'inizio e la fine di un tale processo si possono misurare intervalli di tempo arbitrari mediante la ripetizione dell'evento stesso. Tutti gli orologi, dalla semplice clessidra agli strumenti più raffinati si basano su questo principio*.[11]

Pertanto le definizioni di orologio date da Einstein sono molto generali e può servire come orologio ogni processo periodico che possiede un periodo di vibrazione costante T.

Il problema della sincronizzazione degli orologi distanti in uno stesso SRI è stato molto dibattuto nella letteratura scientifica e lo è tuttora. H. Poincarè[12] sembra essere stato il primo ad individuare il problema della sincronizzazione degli orologi distanti come un problema di fondamentale importanza.

La premessa comune a tutti i metodi di sincronizzazione è che ogni osservatore inerziale abbia a disposizione molti orologi identici, tali cioè da scandire il tempo esattamente con la stessa velocità di avanzamento delle lancette("*passo*"), se posti nelle stesse condizioni fisiche. Il passo può però dipendere dallo stato di moto, cioè può cambiare se un orologio viene spostato. Nei diversi punti di uno stesso SRI il passo deve essere uguale, per via dell'omogeneità dello spazio. Quindi gli effetti del trasporto di un orologio da un punto a un altro di uno stesso SRI sono limitati all'intervallo di tempo durante il quale avviene lo spostamento, cessato il quale l'orologio riacquista il passo iniziale. L problema è dunque che il movimento necessario a portarlo in un punto diverso ne modificherà il passo, *durante il trasporto*. Per coprire una data distanza un orologio può essere trasportato ad alta velocità per un tempo breve, o a bassa velocità per un tempo lungo, ma in entrambi i casi è possibile che ci sia un ritardo finito generato dallo spostamento.

Di metodi di sincronizzazione se ne possono immaginare molti, tuttavia, nella letteratura scientifica prevalgono tre metodi:

1. Metodo di Einstein:
   Dall' origine di un SRI al tempo t = 0 partono in tutte le direzioni impulsi luminosi localizzati. Quando la luce raggiunge un punto P a distanza d dall'origine l'osservatore situato nelle immediate vicinanze di P regola il proprio orologio sul

[8] **A. Einstein** – *Archives des sciences physiques et naturelles*- 29 pag.5 -1910 Francia
[9] **A. Einstein** – *Archives des sciences physiques et naturelles*- 29 pag.125 -1910 Francia
[10] **A. Einstein** – *The Meaning of Relativity*- Metheuen London 1950 pagg.1-2
[11] **A. Einstein L. Infeld** – *L'Evoluzione della fisica*- Boringhieri , Torino 1965
[12] **H. Poincarè** – Congress of Arts and Science – Vol I Editor Rogers 1904

tempo d/c. Tale metodo deriva dal postulato che la velocità della luce sia c in *tutti* i SRI e in tutte le direzioni.

2. Metodo del trasporto lento:
   Un orologio viene trasportato con velocità molto piccola in punti diversi di un SRI e il tempo che mostra, quando passa vicino ad un punto P del SR, viene adottato come tempo di sincronizzazione dell'orologio fermo in P.

3. Metodo della sincronizzazione assoluta:
   Esiste *un solo* SRI S_0 rispetto al quale la velocità della luce è c ed in tutte le direzioni. Gli orologi di S0 sono sincronizzati alla Einstein. In un altro SRI S, in moto rispetto a S_0, ogni osservatore quando vede passare uno degli orologi di S_0, regolato sul tempo $t_0 = 0$ regolerà immediatamente anche il suo orologio su t = 0. Questa operazione sincronizza tutti gli orologi del SRI S.

In merito a questi metodi è possibile affermare che:

- Il metodo di Einstein è in accordo con il *Principio di Relatività*: Le leggi fondamentali della fisica sono le stesse in tutti i SRI e le equazioni che le esprimono quantitativamente mantengono la stessa forma in tutti i SRI[13].
- Il metodo del trasporto lento è compatibile con il metodo di Einstein, e quindi con il Principio di Relatività.

Il metodo della sincronizzazione assoluta non è compatibile con il metodo di Einstein e quindi con il Principio di Relatività[14]. La ragione fondamentale di questa incompatibilità è che ora la velocità della luce non è più isotropa in tutti i SRI (ma solo in S_0) e viene riconosciuto, come per primo aveva fatto notare H. Poincarè[15], che la velocità della luce *di sola – andata* ha un valore convenzionale. Nel metodo di Einstein tale valore è assunto uguale a c[16]. Invece il valore della velocità della luce *andata e ritorno* si può perfettamente misurare, senza ambiguità con un solo orologio, ed è stato trovato uguale a c.
Quando le velocità considerate sono *piccole* rispetto alla velocità della luce (in pratica si assume $c \to \infty$) tutti i metodi di sincronizzazione risultano equivalenti e si rientra nel dominio della Fisica Classica di Galileo e Newton. Questa fisica, come è ben noto, descrive un universo le cui proprietà rimangono immutate se valgono le seguenti equazioni di trasformazione da un SRI ad un altro:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

note come Trasformazioni di Galileo. L'invarianza delle leggi fondamentali della Meccanica sotto le trasformazioni (1) costituisce il Principio di Relatività Galileiano.
Dalla (1) facilmente si trovano anche le equazioni di trasformazioni per le velocità e accelerazioni da un SRI ad un altro:

[13] Questa forma di enunciato del Principio di Relatività e' nota come Principio di Relatività Forte (PRF). Vi è un'altra forma di enunciato del Principio di Relatività: E' impossibile mettere in evidenza sperimentalmente l'esistenza di un moto assoluto della Terra e di ogni laboratorio sulla sua superficie. Questa forma è nota come Principio di Relatività Debole (PRD). Il PRD non necessariamente richiede che la forma delle equazioni, che esprimono le leggi fondamentali della fisica, mantengono inalterata la loro forma in tutti i SRI.
Si può altresì notare che il PRF è certamente un nuovo Principio di Simmetria, simile a quelli di omogeneità ed isotropia dello spazio e di uniformità del tempo.

[14] Almeno non è compatibile con la forma del PRF, ma è compatibile con la forma del PRD.

[15] **H. Poincarè** – *Rev.Metaphys. Morale* – **6**, 1, 1898

[16] Einstein affermò in modo esplicito la natura convenzionale del postulato di invarianza della velocità della luce di sola andata. Nel suo fondamentale articolo del 1905 si legge: "*Finora abbiamo definito solo un "tempo A" e un "tempo B". Non abbiamo definito un "tempo" comune per A e B, perché quest'ultimo non può affatto essere definito a meno che non stabiliamo per definizione che il "tempo" richiesto dalla luce per viaggiare da A a B eguagli il "tempo" richiesto per viaggiare da B ad A.*". **J. Stachel** (a c. di), L'ANNO MEMORABILE DI EINSTEIN, I CINQUE SCRITTI CHE HANNO RIVOLUZIONATO LA FISICA DEL NOVECENTO, Dedalo, Bari (2001).
Einstein riaffermò nuovamente la convenzionalità della velocità della luce di sola andata nel 1916: "*Il fatto che la luce impieghi lo stesso tempo per percorrere AM e BM è solo una convenzione arbitrariamente stabilita per ottenere una definizione di simultaneità, e non un'ipotesi sulla natura della luce sotto l'aspetto fisico.*" **A. Einstein**, LA RELATIVITÀ (ESPOSIZIONE DIVULGATIVA), Newton Compton, Roma (1970).

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{u} - \vec{V} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases} \tag{2}$$

Ovviamente i problemi sorgono, e storicamente sono sorti, con la prima teoria "relativistica", la Teoria dell'Elettromagnetismo di Maxwell.

Quando le velocità considerate sono *piccole* rispetto alla velocità della luce (in pratica si assume $c \to \infty$) tutti i metodi di sincronizzazione risultano equivalenti e si rientra nel dominio della Fisica Classica di Galileo e Newton. Questa fisica, come è ben noto, descrive un universo le cui proprietà rimangono immutate se valgono le seguenti equazioni di trasformazione da un SRI ad un altro:

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

note come Trasformazioni di Galileo. L'invarianza delle leggi fondamentali della Meccanica sotto le trasformazioni (1) costituisce il Principio di Relatività Galileiano.

Dalla (1) facilmente si trovano anche le equazioni di trasformazioni per le velocità e accelerazioni da un SRI ad un altro:

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{u} - \vec{V} \\ \vec{a}' = \vec{a} \end{cases} \tag{2}$$

Ovviamente i problemi sorgono, e storicamente sono sorti, con la prima teoria "relativistica", la Teoria dell'Elettromagnetismo di Maxwell.

Infatti, dalle Equazioni di Maxwell (EM) nel vuoto, lontano dalle cariche elettriche, si deduce l'Equazione di d'Alembert, ad esempio, per il campo elettrico $\vec{E}$:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

Questa equazione descrive onde elettromagnetiche che si propagano con velocità costante c indipendente dallo stato di moto della sorgente. Se le Equazioni di Maxwell e, quindi, l'Equazione di d'Alembert debbono valere in ogni SRI, così come richiesto dal Principio di Relatività (PR)[17], anche il valore numerico di c deve rimanere invariato. Se ciò *non fosse*, dovremmo ritenere che la validità delle EM e quella di d'Alembert sia realizzata in un particolare sistema di riferimento: il Sistema di Riferimento Inerziale Privilegiato (SRIP) S_0.

Si vede subito dalla prima delle (2) che il valore numerico di c non può rimanere inalterato!

Poiché il PR applicato alle leggi della Meccanica si esprimeva mediante le (1), Einstein considerò tali leggi corrette solo in prima approssimazione e rivolse la sua attenzione alle EM per dedurre le trasformazioni spazio – temporali corrette che sostituissero le (1) e che garantissero la validità dello stesso PR unitamente alla costanza del valore della velocità della luce *su percorsi di andata e ritorno* .

Il gruppo di invarianza della fisica aristotelica è il gruppo euclideo (rotazioni e traslazioni spaziali), mentre quello della meccanica classica è il gruppo di Galileo(rotazioni e traslazioni spaziali, traslazioni temporali e cambiamento di SRI). Invece il gruppo di invarianza dell'elettromagnetismo maxwelliano non è più il gruppo di Galileo, ma un gruppo di cui al tempo di Maxwell non si sospettava ancora l'esistenza: si tratta del gruppo di Poincaré-Lorentz, che fu ufficialmente introdotto nella fisica solo con la Relatività Speciale di Einstein[18].

---

[17] Vedi nota 12

[18] **A. Einstein** – *Zur Elektrodynamik bewegter K¨orper*- Annalen der Physik, **17**, 891, (1905).

A proposito dell’invarianza galileiana è interessante, se non altro per semplice interesse culturale, riportare quanto sostiene Leonardo Ricci, ricercatore di fisica generale del Dipartimento di Fisica dell'Università di Trento che ha pubblicato su "Nature" nel 2006 un articolo in cui descrive questa considerazione. "Il principio fisico lo ha sicuramente scoperto Galileo, ma Dante lo ha descritto già nel 1307, quando cioè si presume che abbia iniziato a scrivere la sua Commedia":

Ella sen va notando lenta lenta;
rota e discende, ma non me n'accorgo
se non che al viso e di sotto mi venta.
(*Divina Commedia*, Inferno, canto XVII)

In queste terzine scritte da Dante Alighieri c'è l'esatta descrizione del principio elaborato da Galileo Galilei (1632) della cosiddetta *invarianza galileiana*.
L'analisi dello studioso prende le mosse dal XVII canto dell'*Inferno* in cui Dante, raccontando la sua discesa dal settimo all'ottavo cerchio, immagina di volare a bordo del mostro Gerione. L'osservazione, contenuta ai versi 115-117, racchiude secondo Ricci alcune informazioni preziose agli occhi di un fisico. La descrizione della situazione in cui si trova (l'essere trasportato dalla creatura infernale, il vento, la mancanza di riferimenti visivi) portano Dante a sostenere che la sua sensazione del volo non sarebbe dissimile dall'esser fermo. Un'osservazione in completa sintonia con l'esperimento del gran navilio, con cui Galileo illustra il principio di relatività che oggi porta il suo nome.
Secondo Ricci "Risulta difficile pensare che quanto descritto sia frutto della casualità: Dante non ha compiuto bensì immaginato intenzionalmente un viaggio, costruendo le varie situazioni e i vari scenari per esprimere direttamente o allegoricamente il proprio messaggio. Nel fare ciò, egli attinse al suo sapere enciclopedico, che comprendeva anche le cosiddette arti del quadrivio: aritmetica, geometria, musica e astronomia". Esiste dunque un legame tra questi due illustri pensatori italiani? La tesi suggerita da Leonardo Ricci sembra confermarlo anche se la risposta definitiva, come di solito accade, è affidata al dibattito che potrà svilupparsi nella comunità scientifica.

7. SIMMETRIE E LEGGI DI CONSERVAZIONE NELLA MECCANICA CLASSICA: UN PUNTO DI VISTA ELEMENTARE

Mostreremo una derivazione elementare di quanto affermato dal TEOREMA di NOETHER, almeno nell’ambito della Meccanica Newtoniana.
Ricordiamo che Simmetria,dal greco simmetria, equivale a commensurabilità, quindi, relazione di proporzione che ha la funzione di armonizzare differenti elementi in un tutt’uno, in pratica armonia, bellezza, unità. Ulteriori evoluzioni sono venute dall’algebra: le operazioni di simmetria trattate nell’ambito della “Teoria dei Gruppi”.Nella concezione più moderna: intercambiabilità di parti che preservano il tutto.
Per esempio l’oggetto può essere la forma geometrica di un corpo e le operazioni di simmetria, la traslazione dell’oggetto in una direzione, la rotazione attorno ad un asse o la riflessione in un piano. Tuttavia l’oggetto può anche essere una legge della natura espressa da un’equazione matematica, per esempio la lunghezza di un corpo, o l’equazione delle onde nel vuoto. In questo caso simmetria vuol dire invarianza (o meglio covarianza) della forma dell’equazione a seguito di trasformazioni di simmetria di natura non geometrica.
In fisica oggi diciamo che un sistema e’ simmetrico rispetto ad una data operazione/trasformazione se, dopo aver compiuto tale operazione, esso appare ancora lo stesso o si comporta allo stesso modo (segue la stessa legge, e’ ancora un sistema ammissibile dalle leggi che conosciamo). Pertanto:

SIMMETRIA ⇔ INVARIANZA RISPETTO AD UNA TRASFORMAZIONE
In Meccanica Newtoniana vale appunto il seguente schema:

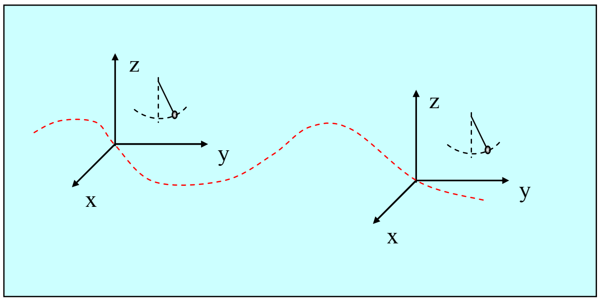
Invarianza per:	**Conservazione di:**
Traslazione nello spazio	Quantita' di moto
Rotazione nello spazio	Momento angolare
Traslazione nel tempo	Energia

Tab.1

Omogeneità dello spazio

Un'equazione fisica scritta per un dato sistema di riferimento non muterà di forma se il sistema subisce una traslazione nello spazio.

Una legge fisica che sia valida in un certo punto dello spazio deve esserlo anche in un altro.



Le leggi della Fisica sono invarianti per traslazioni nello spazio

⇩

Conservazione della quantità di moto

Fig.2

L'invarianza per traslazione dell'energia potenziale implica la conservazione della quantità di moto. Consideriamo l'energia potenziale di due particelle di coordinate x_1, x_2. Se l'energia potenziale delle particelle è invariante per traslazione, si deve avere:

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + l, x_2 + l)$$

dove l è una traslazione lungo l'asse *x*. La verifica `e particolarmente semplice per una forma di energia potenziale del tipo:

$$\mathrm{U}(\mathrm{x}_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

Infatti se l è una traslazione lungo x otteniamo:

$$\mathrm{U}(\mathrm{x}_1 + l, x_2 + l) = \left[(x_1 + l) - (x_2 + l)\right]^2 = (x_1 - x_2)^2 = U(x_1, x_2)$$

Questo risultato si estende immediatamente a tre dimensioni, ossia al caso in cui l'energia potenziale è funzione unicamente di: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, cioè: $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Infatti, in questo caso non muta la differenza tra i vettori posizione delle particelle: $\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Poiché:

$$\vec{F}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1};\ \vec{F}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}$$

Risulta immediatamente che:

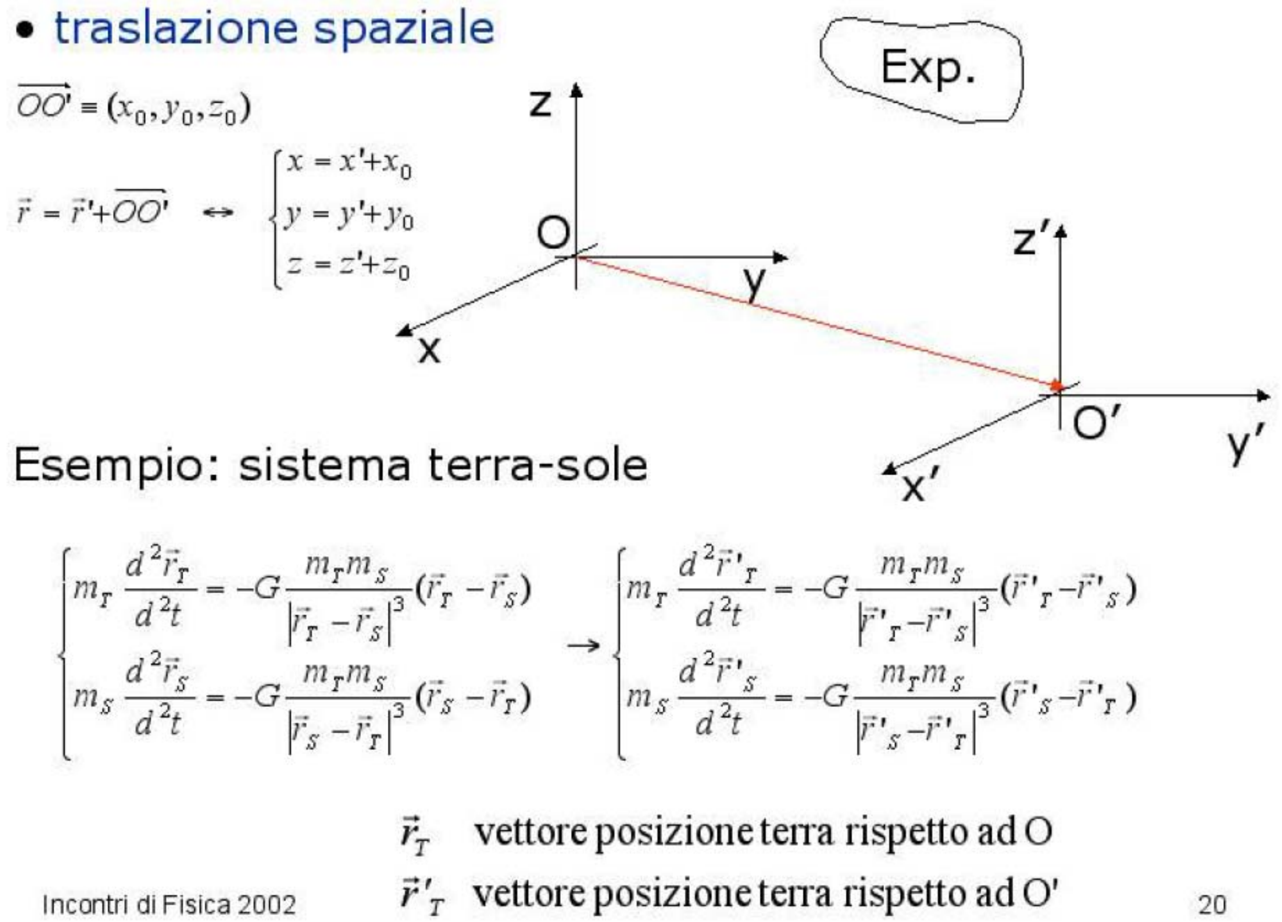
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Segue che la risultante delle forze di interazione tra le particelle è nulla:

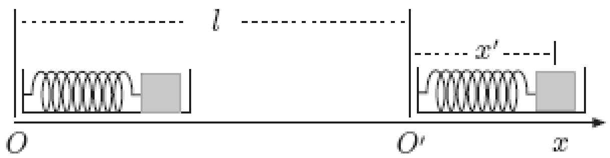
$$\vec{F}_{Ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = 0$$

Pertanto la quantità di moto totale è costante: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante}$.

I vettori, come è noto, godono della proprietà d'invarianza per traslazione e per rotazione. Dunque, la seconda legge della dinamica newtoniana $\vec{F} = m\vec{a}$ è invariante per traslazione. Due esempi notevoli:



OSCILLAZIONI DI UNA MOLLA



(a) (b)

$$x = x' + l, \qquad x' = x - l.$$

$$F_x = -k(x - x_0), \qquad F_{x'} = -k(x' - x'_0) = -k[(x - l) - (x_0 - l)] = -k(x - x_0).$$

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

nel riferimento O':

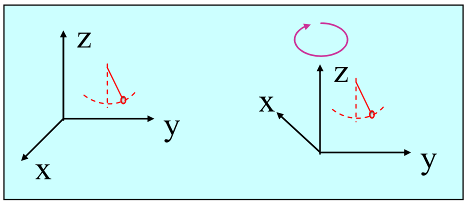
$$F_{x'} = m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2(x-l)}{dt^2} = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Otteniamo una espressione identica alla precedente: la seconda legge della dinamica `e invariante per traslazioni. Se il sistema nella posizione (a) esegue oscillazioni armoniche, anche nella posizione (b) eseguirà identiche oscillazioni.

Isotropia dello spazio

Un’equazione fisica scritta per un dato sistema di riferimento non muterà di forma se il sistema subisce una rotazione nello spazio.

Una legge fisica è indipendente dall’orientazione spaziale.



Le leggi della Fisica sono invarianti per rotazioni nello spazio

Conservazione del momento angolare

Fig. 3

Richiedere che lo spazio sia isotropo (“tutte le direzioni sono uguali”) significa richiedere che le leggi del moto siano invarianti per rotazioni, ovvero se noi ruotiamo tutto il sistema fisico rispetto ad uno o più assi del nostro sistema di riferimento, dobbiamo ritrovarci con le stesse equazioni.
Chiamiamo per brevità $\Re$ l’operatore rotazione, costituito per esempio dalle equazioni di trasformazione di coordinate, e con $\vec{r}$ il vettore posizione della particella allora scriveremo:

$$\Re\vec{r} = \vec{r}\,'$$

Ad esempio, per una rotazione del SR attorno all’asse z, $\Re$ è la matrice:

$$\Re = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso il modulo della distanza tra due particelle $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ non muta, cioè:

$$|\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

Pertanto se consideriamo due particelle interagenti la cui energia potenziale d'interazione dipende dal modulo della loro distanza reciproca, $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=U(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$, tale energia potenziale sarà invariante per rotazione e le forze sulle particelle:

$$\vec{F}_{12}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}=-\frac{\partial U}{\partial|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|};\qquad \vec{F}_{21}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}=+\frac{\partial U}{\partial|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

saranno uguali, opposte e dirette lungo la loro congiungente, cioè saranno forze centrali. E' noto che il momento totale di tali forze è nullo qualunque sia il polo:

$$\vec{M}_{tot}=\vec{M}_1+\vec{M}_2=\vec{R}_1\times\vec{F}_{12}+\vec{R}_2\times\vec{F}_{21}=\left(\vec{R}_1-\vec{R}_2\right)\times\vec{F}_{12}=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}=0$$

Quindi il momento angolare totale del sistema di particelle si conserva, cioè:

$$\vec{L}_{tot}=\vec{L}_1+\vec{L}_2=\text{costante}$$

Anche la seconda legge della dinamica newtoniana $\vec{F}=m\vec{a}$, scritta in forma vettoriale, è invariante per rotazione.
Come avremo modo di illustrare più in dettaglio in seguito, un notevolissimo esempio di conservazione del momento angolare è dato dal moto dei pianeti.

Esempio di conservazione del momento angolare

MOTO DEI PIANETI

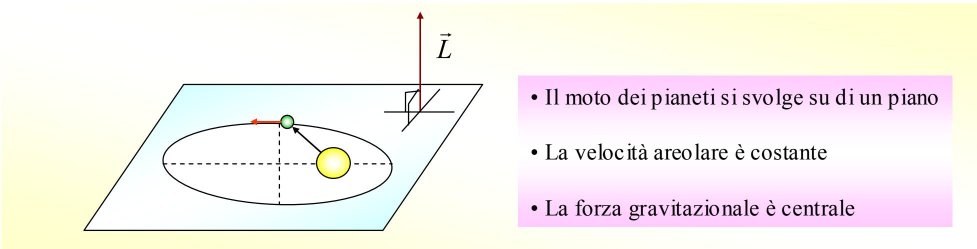
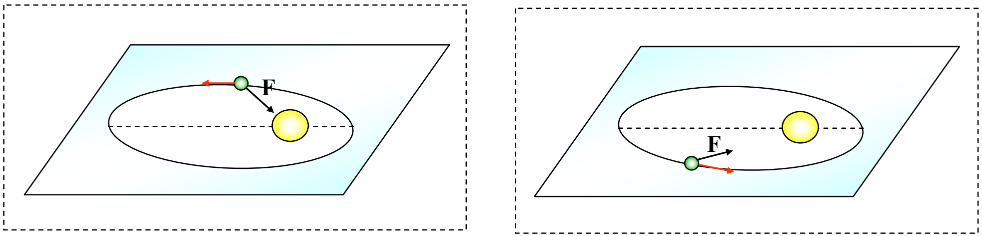


Fig. 4

Omogeneità del Tempo

Invarianza temporale delle costanti universali



1600 2001

$$\vec{F} = \gamma \frac{\mathrm{mM}}{\mathrm{r}^2}\hat{r} \qquad \gamma = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/Kg^2}$$

Le leggi della Fisica sono indipendenti dal tempo

⇩

Legge di Conservazione dell'Energia

Fig. 5

La conservazione dell'energia è conseguenza della simmetria per traslazioni nel tempo; infatti è l'energia totale di un sistema di particelle interagenti mediante forze che non dipendono esplicitamente dal tempo, è costante. La conservazione dell'energia implica l'esistenza di una grandezza, l'energia totale $H = E_{cin} + U$, che è invariante rispetto al tempo; questa grandezza è dunque invariante per traslazioni temporali.

E' utile, a questo punto chiarire meglio la natura di H . H è la somma dell'energia di movimento del corpo e della sua energia potenziale d'interazione con l'ambiente esterno. Per comprendere la vera natura dell'energia potenziale diciamo subito che l'ambiente esterno per l'oggetto è costituito dai campi di forza con i quali il corpo interagisce: campo gravitazionale, campo elettromagnetico, campo nucleare forte e campo nucleare debole. Ora, un risultato fondamentale della conoscenza è il seguente: in ogni regione di spazio dove è presente un campo di forze è contenuta dell'energia: gravitazionale, elettromagnetica, nucleare forte, nucleare debole. La natura di questa energia di campo è di movimento dei quanti del campo: gravitoni per il campo gravitazionale, fotoni per quello elettromagnetico, mesoni per quello nucleare, bosoni vettori per il campo nucleare debole. Questo è il risultato fondamentale raggiunto dalla teoria dei campi quantizzati: un campo di forza è un continuo e disordinato intrecciarsi dei suoi quanti. Il campo gravitazionale terrestre è dovuto alla continua emissione (e al successivo riassorbimento)di gravitoni da parte degli atomi che costituiscono la Terra. Allo stesso modo il campo elettrico deriva dall'emissione e dal riassorbimento di fotoni da parte delle cariche che generano il campo. Così, infine, il campo nucleare deriva dall'emissione e dal riassorbimento dei mesoni π da parte dei neutroni e dei protoni che generano il campo. Allora l'energia potenziale di un corpo in una regione dove è presente un campo di forza è la misura dell'energia che il corpo è in grado di assorbire dal campo e di trasformarla in energia di movimento, una volta che il corpo sia liberamente soggetto all'influenza del campo. Quindi, quando un corpo di massa m cade liberamente nel campo gravitazionale terrestre, assorbe una quantità di energia dal campo gravitazionale pari a mgh e la converte in energia cinetica.

Il seguente esempio mostra in modo didatticamente significativo la connessione tra invarianza temporale delle leggi fisiche e la conservazione dell'energia:

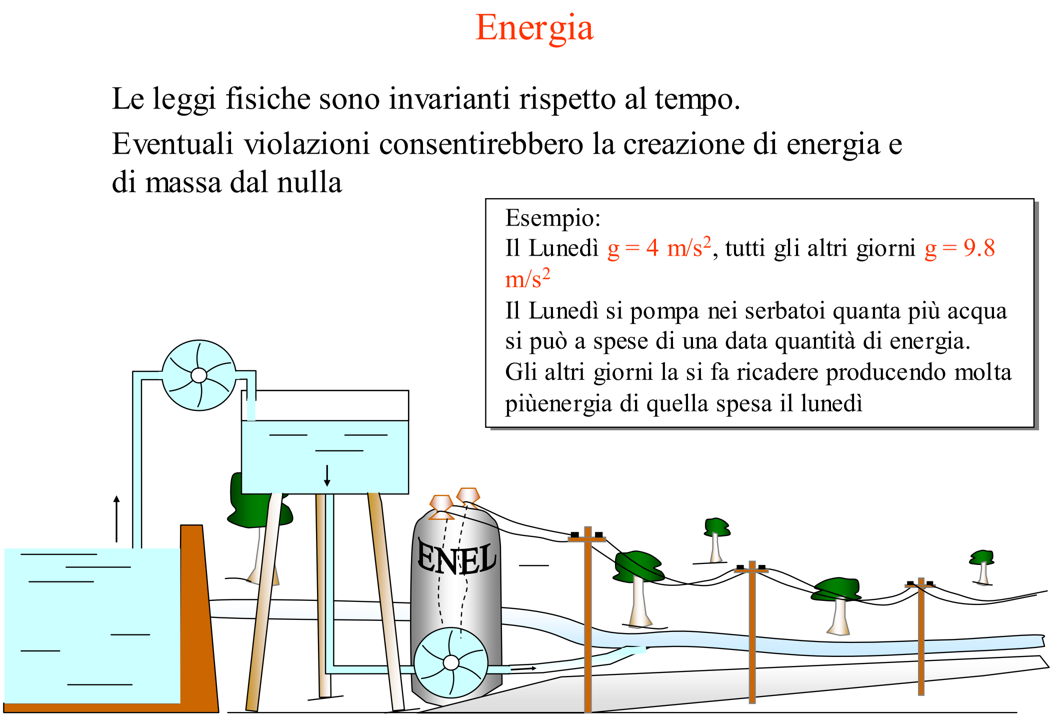


Fig. 6

Quest'ultimo esempio pone alla nostra attenzione, tuttavia, il seguente problema: Le costanti fisiche universali che compaiono nelle leggi fisiche sono veramente costanti nel tempo?

Einstein postulò la costanza (c = 3 10^8m/s) della velocità della luce nel vuoto in relatività ristretta. (a differenza delle altre (G, h), c non è una costante di proporzionalità). Tra l'altro affermò: "Più ci sono costanti, e meno la teoria è generale e universale. Deve esistere una teoria universale con un numero minimo di costanti fondamentali (quante?). Ci sono due tipi di costanti: apparenti, e fondamentali. Le prime sono una convenzione, dipendono dal modello o dalle unità di misura (per es. h = c = 1). Le seconde sono numeri puri, come π."

Quindi secondo Einstein G,h, c non sono costanti fondamentali (e su questo si può discutere...). D'altro canto non esiste una loro combinazione adimensionata. Se introduciamo e, m_p, la massa del protone, abbiamo le combinazioni:

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \simeq \frac{1}{137} \qquad \alpha_G = \frac{G m_p^2}{hc} \simeq 10^{-38}$$

che sono adimensionate e fondamentali.

α e α_G sono molto formalmente molto simili: stesso denominatore; elettrodinamica e gravità hanno (energia) potenziale che vanno entrambi come 1/r. Il numeratore di α e α_G è proprio la costante di proporzionalità tra V e 1/r, ma molto diverse numericamente (per

fortuna): $\alpha \sim 1/137$ è perfetta, né troppo grande né troppo piccola! Sufficientemente piccola per giustificare calcoli perturbativi in QED, e sufficientemente grande per misurarli.
Che cosa accadrebbe se qualcuna delle costanti cambiasse un pochino il suo valore? In alcuni casi accadrebbe un disastro (sarebbe in discussione l'esistenza stessa della vita come noi la intendiamo adesso).
E se per caso le costanti variassero, ma in modo tale che α rimanga costante, cosa accadrebbe? Nulla che non possa essere riassorbito da un cambio di unità di misura, ma fisicamente non cambierebbe granché. E questo vale anche in moltissimi casi di costanti dimensionate, perché in tutte le misure fisiche:
a) o si fanno conteggi (adimensionati)
b) o si si comparano grandezze dimensionate rispetto ad una unità campione (che di fatto è adimensionata ed equivale a un conteggio).
Limiti di sicurezza di α possono essere stimati imponendo che:

- il tempo di decadimento del protone $\tau_p \sim \alpha^{-2}\left(\hbar / m_p c^2\right) e^{-1/\alpha}$ è maggiore dell'età dell'universo, questo comporta che $\alpha < 1/100$
- sotto la scala di Planck, $\ell_P = \sqrt{\frac{hG}{c^3}} = 4.33 \cdot 10^{-35} m$,le teorie fondamentali erano unificate, questo comporta che $\alpha > 1/160$, pertanto l'intervallo di variabilità di α risulta:

$$1/160 < \alpha < 1/100$$

Il numero N di costanti fondamentali adimensionate (tipo α), nelle teorie unificate è:

$$0<N<26$$

La reazione nucleare di risonanza che coinvolge il Samario:

$$n + {}^{149}Sm \longrightarrow {}^{150}Sm + \gamma$$

può avvenire solo se c' è una precisa compensazione tra le interazioni in gioco, e...
se 2 miliardi di anni fa α fosse stata significativamente diversa da quella attuale, il Samario non sarebbe presente tra i prodotti di reazione! Pertanto, 2 miliardi di anni fa α non poteva differire da quella odierna per più di una parte su 10 milioni:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 0 \pm 9 \;\; 10^{-8}$$

E' possibile fare misure di α ancora più indietro nel tempo utilizzando le quasar che al telescopio appaiono come una stella o una galassia, ma emettono enormemente di più e hanno un fortissimo red-shift (sono lontanissime), tanto che la loro posizione è considerata ai confini del nostro universo. Dal confronto tra i loro spettri e quelli emessi dagli stessi elementi chimici sulla Terra, sono state notate lievi differenze nelle separazioni tra le righe spettrali che sono imputabili a variazioni di α , e si trova che α sta crescendo:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha_{quasar} - \alpha_{terra}}{\alpha_{terra}} = -1.2 \pm 0.3 \; 10^{-5}$$

Pertanto sembrano esserci evidenze concrete che molte delle costanti adimensionate non siano affatto costanti. E' $\alpha \sim 1/137$ nella nostra epoca, della nostra fase del nostro universo.
Tuttavia è doveroso annotare che quest'ultimo risultato si basa sull'interpretazione del red-shift delle quasar sia dovuto all'espansione cosmica, e pertanto, all'effetto Doppler, ma una minoranza di astrofisici non sono propensi nell'accettare questo punto.

La messa in discussione della conservazione dell'energia è stata tentata molte volte nella storia della fisica, un esempio celebre è dovuto a Bohr. Per Bohr causalità significava esistenze di regole precise nello svolgersi dei fenomeni atomici. Queste regole le vedeva applicate nella validità delle leggi di conservazione(energia, quantità di moto,ecc.). Per Bohr le relazioni d'indeterminazione di Heisemberg erano espressione della incompatibilità della descrizione dei fenomeni atomici come evolventi nello spazio e nel tempo e, simultaneamente, conservanti l'energia, la quantità di moto, ecc. Per Bohr spazio,tempo energia, impulso,causalità, onda, corpuscolo erano solo "pregiudizi classici", concetti utili ma non "veri" per l'interpretazione dei processi elementari. Tentò per ben due volte di eliminare dallo schema teorico le leggi di conservazione: una prima volta nel 1924 quando con Kramers e Slater formulò la teoria delle "onde virtuali" e una seconda volta durante gli anni trenta quando propose che lo spettro continuo degli elettroni nei decadimenti beta fosse una prova della non conservazione dell'energia. Entrambe le volte gli esperimenti di Bothe, Geiger, Compton e Simon nel 1925 e la scoperta del neutrino da parte di Reines e Cowan nel 1956 mostrarono che aveva torto.
Pertanto, anche con i risultati che mostrano un $\Delta\alpha/\alpha$ più significativo del solito la prudenza è quanto mai d'obbligo!!

8. SIMMETRIE E LEGGI DI CONSERVAZIONE NELLA MECCANICA CLASSICA: IL PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE

Oggi la moderna Fisica Teorica non può essere compresa senza conoscere gli sviluppi e i concetti fondamentali della *Meccanica Analitica*.
Le origini della *Meccanica Analitica* risalgono a *Leibniz*.
Leibniz, contemporaneo di Newton, preferiva come concetto fondamentale della meccanica, non la *forza*, ma il *lavoro della forza*, e come misura dei suoi effetti la variazione della *vis viva* (il doppio della moderna *energia cinetica*) al contrario nella meccanica newtoniana dove l'azione di una forza è misurata dalla variazione della *quantità di moto* o *momento*. La nozione di *lavoro di una forza*, evolvendosi, divenne la moderna *energia potenziale*, nel caso di sistemi conservativi. Pertanto, il metodo originariamente proposto da Leibniz, fatto proprio poi dalla *Meccanica Analitica*, pone alla base di ogni problema meccanico due *quantità scalari*: *l'energia cinetica e potenziale*.
Nella meccanica di Newton, invece, un problema meccanico è affrontato con ponendo alla base due *quantità vettoriali*: *la forza* e *la quantità di moto*.
Mentre per Newton la legge fondamentale della dinamica è $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, per Leibniz è invece

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

Gli approcci diversi utilizzati da Newton e Leibniz per la studio della meccanica riflettono, in realtà, le due visioni alternative che loro possedevano della " *immagine del mondo*".
Lo scontro Newton – Leibniz , tramandato dal carteggio Leibniz - Clarke[19], in cui quest'ultimo era il difensore delle idee newtoniane, evidenzia le diverse filosofie e i diversi punti di vista.
Infatti, Newton cercò di teorizzare esplicitamente una nuova convivenza fra scienza e religione. Ciò si trova proprio nello "*Scolio generale*" dei Principia. Newton fece di tutto per evitare possibili esiti materialistici ed ateistici della nascente fisica teorica. Nello *Scolio* Newton afferma: " *Dio dura sempre ed è presente ovunque* ", non solo virtualmente, ma sostanzialmente. Dio non risente affatto della presenza e del moto dei corpi, e tuttavia è la sua presenza che definisce lo *spazio assoluto* e il *tempo assoluto*. " *Noi siamo capaci di notare solo gli spostamenti relativi e le durate relative perché come un cieco non ha idea*

[19] **Alexander H.G.** – *The Leibniz – Clarke correspondence* – Manchester University Press – Manchester 1956

dei colori così noi non possiamo percepire direttamente la sua presenza. “ Per Newton lo *Spazio Assoluto* e il *Tempo Assoluto* hanno origine divina, lo spazio è l’organo per mezzo del quale Dio *percepisce* le cose da Lui create. La materia, per Newton, *non può adeguarsi perfettamente alle leggi della dinamica*, pertanto è *necessario di tanto in tanto* un intervento divino per rimettere sul loro giusto corso i pianeti, che abbandonati a se stessi, si allontanerebbero irrimediabilmente dal movimento regolare imposto dalle leggi di Keplero.

Al contrario. Leibniz sostenne invece che *Dio non aveva bisogno di alcun organo di senso per percepire la realtà materiale* e rifiuta l’idea di una *materia imperfetta* e l’immagine di un creatore costretto ogni tanto *come un orologiaio* a rimettere ordine nei meccanismi della sua creatura. Per Leibniz il mondo è stato creato una volta per tutte, poi *abbandonato per sempre alla sua naturale dinamica materiale*. Riferendosi alle idee di Newton, Leibniz scrisse: “ *Credo che l’autore avesse torto ad aggiungere che i principi matematici della filosofia sono opposti a quelli dei materialisti. Al contrario, essi sono gli stessi; solo con questa differenza, che i materialisti, imitando Democrito, Epicuro e Hobbes, si confinano completamente ai principi matematici, ed ammettono soltanto l’esistenza dei corpi; mentre i matematici cristiani ammettono anche l’esistenza delle sostanze spirituali.* “

Il fisico teorico F. Selleri[20] afferma che Newton è uno degli artefici del *compromesso* tra scienza e religione e *di classe* tra le *tendenze materialistiche* della giovane borghesia e quelle *mistiche* della vecchia aristocrazia: “ *Indubbiamente egli è un uomo chiave della fisica moderna, non solo per la grande importanza delle sue scoperte, ma anche perché la sua opera rese possibile la composizione dei contrasti fra la Chiesa Anglicana e la scienza inglese, e più in generale fra le religioni cristiane e la scienza occidentale…. .*

Il compromesso fra scienza e religione portato a compimento in Inghilterra da Newton trova dei precisi paralleli nelle elaborazioni continentali di Leibniz, Cartesio e Voltaire, tutti preoccupati che potessero ripetersi eventi repressivi come quelli che avevano colpito Giordano Bruno e Galileo. “

I nomi illustri per la formulazione e lo sviluppo della *Meccanica Analitica* furono: P. L. Maupertuis, L. Eulero, J. B. D’ Alembert, G. Lagrange, S. Poisson, K. Jacobi e W. Hamilton.

Le ricerche di questi grandi scienziati hanno portato a diverse formulazioni della meccanica classica, abbastanza equivalenti fra loro. Si può dire che ci sono *sette formulazioni*, tutte basate su una *filosofia deterministica*[21] dei fenomeni naturali:

Le tre leggi di Newton, Le equazioni di Lagrange, Le equazioni di Hamilton, Il metodo delle parentesi di Poisson, Il principio di minima azione, Il principio variazionale di Hamilton, L’equazione di Hamilton –Jacobi.

---

[20] **F. Selleri** – *L’unità del cielo e della terra* – Giornale di Fisica Vol. XXXIX N°3 1998

[21] Dottrina filosofica secondo la quale ogni evento, sia mentale sia fisico, è predeterminato da cause, in maniera tale che non c'è posto nella natura né per eventi che siano frutto del caso, né per libere scelte dell'uomo. Data una causa, l'evento seguirà inevitabilmente, travalicando così l'elemento della casualità o della contingenza. Occorre distinguere il determinismo da qualsiasi concezione che affermi la presenza di un destino o di un fato: mentre il fatalismo comporta il riferimento a una necessità cieca e misteriosa, oppure la credenza in un ordine razionale e divino delle cose (come nel caso della dottrina dei filosofi stoici), il determinismo fa riferimento solo alla concatenazione necessaria di cause in senso meccanico e costituisce una particolare forma di generalizzazione sul piano metafisico della concezione moderna della causalità. Sebbene le sue origini possano essere ricondotte all'antica dottrina atomistica di Democrito, il determinismo costituisce una tendenza propria della filosofia moderna, che nasce nel XVII secolo come tentativo di estendere all'interpretazione di tutta la realtà il modello meccanicistico dell'impresa scientifica. Se ne può trovare una prima e grandiosa formulazione nella filosofia di Spinoza: egli ritiene infatti che le due serie parallele degli eventi fisico-corporei, da un lato, e delle idee e degli affetti psichici, dall'altro, procedano secondo una medesima necessità causale, essendo attributi di un'unica sostanza divina identificata con la natura.
All'inizio dell'Ottocento l'astronomo francese Pierre-Simon de Laplace scriveva: "Noi dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto di un dato stato anteriore e come la causa di ciò che sarà in avvenire". Su questa base egli riteneva che un'ipotetica intelligenza, cui fossero note in un dato istante tutte le forze che agiscono in natura, sarebbe in grado di prevedere tutti gli stati successivi dell'universo. Oggi una simile concezione è stata abbandonata dagli scienziati. Gli sviluppi della fisica nel Novecento, la nascita della meccanica quantistica e il principio di indeterminazione di Heisenberg hanno fatto cadere il modello deterministico di Laplace, orientando la scienza verso una concezione probabilistica o statistica della causalità.

In particolare, in *Meccanica Analitica* esiste una funzione scalare, denominata *Lagrangiana* L, delle coordinate, delle velocità e del tempo, tramite la quale è possibile scrivere l'equazione del moto di Newton in modo alternativo e che si presta ad una maggiore generalizzazione anche nei casi della Relatività Speciale o Generale e della Meccanica Quantistica in cui l'equazione del moto di Newton deve essere modificata. La *Meccanica Analitica* fornisce quindi una parte essenziale del *linguaggio formale* della fisica moderna. Infatti, è possibile dare una formulazione lagrangiana o hamiltoniana della Relatività Speciale o Generale. Ancora più forte è il rapporto tra teoria quantistica e meccanica analitica, perché Bohr, Heisenberg, Schroedinger e Dirac costruirono la nuova teoria usando il più generale apparato matematico della fisica classica, che si *dimostrava capace di sopravvivere* alla rivoluzione quantistica proprio perché creato non per servire questa o quella immagine fisica del mondo, ma solo la parte più astratta della fisica.

Il punto di partenza è l'equazione del moto di Newton, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, scritta, nell'ipotesi che la forza sia derivabile da un potenziale U:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

cioè: $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$. Ma $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m}\frac{\partial \vec{p}^2}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(\vec{p}^2/2m\right)}{\partial \vec{v}}\right] = \frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial \vec{v}}$.

Pertanto, definita la funzione : $L(\vec{r},\vec{v}) = E_{cin} - U$, detta Funzione di Lagrange o Lagrangiana, l'equazione del moto di Newton è scritta in modo equivalente come:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

Quest' ultima è nota come Equazione del moto di Lagrange. Se la particella è libera allora è $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = 0$, pertanto, in meccanica classica la Lagrangiana di una particella libera coincide con l'energia cinetica della particella: $L = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$. E' da notare che la lagrangiana di una particella libera è una funzione del quadrato della velocità della particella.

Quest'ultima proprietà caratterizza fisicamente la funzione lagrangiana L di una particella in un SRI rispetto al quale lo *spazio vuoto è omogeneo ed isotropo*, e il *tempo omogeneo*.

Infatti: per l'omogeneità dello spazio L non potrà contenere in forma esplicita il raggio vettore **r** (x,y,z) del punto, così come per l'isotropia dello spazio non potrà dipendere nemmeno dalla direzione del vettore v, mentre per l'omogeneità del tempo nemmeno dal tempo t.

La Lagrangiana L che descriverà *un punto materiale libero*, dipenderà soltanto dal valore assoluto della *velocità* del punto, cioè dal suo quadrato: $L(\mathrm{v}^2)$.

Non sempre la Lagrangiana di una particella libera coincide con la sua energia cinetica. Infatti, in *meccanica relativistica* la Lagrangiana del punto materiale libero è data da: $L_{Rel} = -mc^2\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}$. Tuttavia è sempre una Lagrangiana del tipo $L(\mathrm{v}^2)$.

Le dimensioni di L, nel S.I. sono: $m\left(\frac{\ell}{s}\right)^2 \rightarrow \mathrm{Joule}$.

La forma dell'equazione di Lagrange *non è alterata* se al posto di considerare potenziali U(x,y,z), dipendenti solo dalla posizione, consideriamo potenziali $U(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

dipendenti anche dalla velocità, tali che: $\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathbf{v}}\right)$. Questo è infatti ciò che accade ad una particella carica in un campo elettromagnetico, dove se si considera il potenziale

$$\mathrm{U} = \mathrm{q}\phi - \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

con ϕ e **A** rispettivamente *potenziale scalare* e *vettore* che descrivono il campo elettromagnetico dove è posta la particella di carica q che subisce la forza $\mathbf{F} = \mathrm{q}\mathbf{E} + \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, dovuta al campo elettrico $\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}} - \frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\mathrm{t}}$ e al campo magnetico $\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{A}$.
In questo caso la Lagrangiana assume la forma:

$$L = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

e l'equazione di Lagrange dà le corrette equazioni del moto per la particella di carica q la cui velocità non è relativistica. Per ottenere, invece, le corrette equazioni del moto dall' equazione di Lagrange in regime relativistico la Lagrangiana deve essere:

$$L_{\mathrm{Re}l} = -mc^2\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2} - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$$

Il punto importante è che si può dimostrare che le equazioni del moto di Lagrange si ottengono imponendo il Principio di Minima Azione alla lagrangiana, ovvero che la legge oraria della traiettoria fra due punti a e b dati è quella che rende minimo il seguente integrale (integrale d'azione):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},\mathrm{t})\,dt = \mathrm{minimo}$$

cioè:

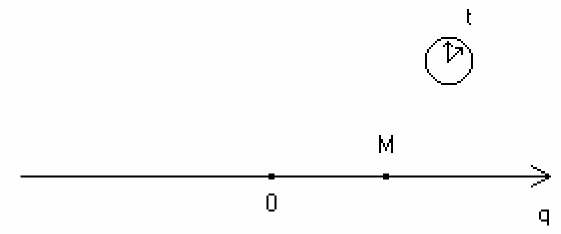
$$\delta S = 0$$

L'integrale d'azione gode dunque della simmetria per cui, calcolato su una legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$ possibile, esso è invariante per piccole variazioni della stessa legge oraria $\vec{r}(t) \to \vec{r}(t) + d\vec{r}(t)$ (con t_1 e t_2, ovviamente, fissi), e si dimostra che questo è sufficiente per determinare le equazioni del moto !
Cerchiamo di comprenderne il significato, almeno intuitivamente, con un esempio che conosciamo benissimo
Facciamo finta che la funzione *L* sia una grandezza fisica a noi familiare, ad esempio la velocità di un moto rettilineo uniforme v_x. Essendo il moto rettilineo e uniforme, tale velocità sarà costante nel tempo (quindi non dipenderà esplicitamente da t), ma non dipenderà naturalmente nemmeno dalla coordinata x perché, naturalmente, la velocità della particella sarà, per definizione, sempre la stessa, ovunque si trovi. L'integrale di una velocità nel tempo dà una distanza, pertanto:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_x dt$$

sarà la distanza percorsa dalla particella nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2. Per comprendere il concetto di *funzionale* immaginiamo di mantenere *fissi* gli estremi del moto, ovvero $x(t_2)$ (il punto finale) e $x(t_1)$ (il punto iniziale); è come dire che immaginiamo che la nostra particella si muova da una posizione iniziale (casa) ad una posizione finale (scuola) che sono fisse, non cambiano mai.

Ma ora facciamo in modo che la particella possa percorrere tragitti diversi. Le condizioni sono tali per cui all'istante t_1 il sistema si trova a casa, e all'istante t_2 si trova a scuola, ma il percorso che fa nel mezzo può *variare*.
Quanta strada percorre la particella da casa a scuola?
Matematicamente, possiamo trovare un modo per parametrizzare la *variazione dello spazio percorso* attraverso la *variazione della strada* scelta per andare dal punto di partenza al punto di arrivo, che sono sempre fissi. Ecco, stiamo facendo del *calcolo variazionale*. Un numero reale (la distanza percorsa) viene associato all'integrale di una funzione che dipende dal tempo ma anche dalle coordinate (se il moto è vario, anziché uniforme, ci saranno pure le velocità). La *variazione* di questo numero reale, che chiamiamo *azione*, è legata alla variazione delle coordinate da cui dipende la funzione, mantenendo fissi gli estremi.
Si dimostra che le funzioni $q_i(t)$ per le quali la *variazione* dell'azione (a estremi fissi) è *nulla* sono tutte e sole le soluzioni delle equazioni di Lagrange posta *L* come la lagrangiana della particella. Questo risultato prende il nome di *principio di minima azione* o *principio dell'azione stazionaria*.
La seguente successione di figure e grafici illustra quanto sopra detto.



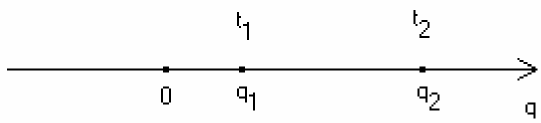
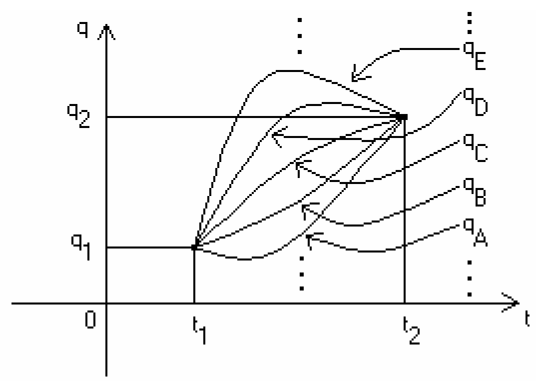


Fig. 7 **Fig. 8**

Istante per istante, in che posizione q verrà a trovarsi la particella M ?



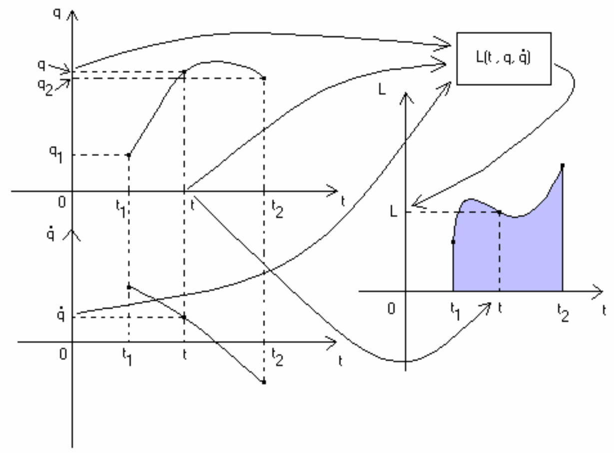


Fig. 9 **Fig. 10**

Le funzioni orarie che uniscono il punto iniziale con il punto finale sono infinite, quindi la particella, movendosi , potrebbe "*scegliere*" uno qualsiasi di questi grafici.
E' colorata l'area formata dal grafico della lagrangiana L perché essa assume un ruolo fondamentale : il "*moto reale*" fra il punto iniziale ed il punto finale è quello per cui l'*area* in questione è *minima* !!!

Finalmente è ora possibile dimostrare che:
Se $q_0(t)$ rappresenta la curva oraria di un corpo M che rende l'azione S stazionaria (cioè fra gli istanti t_1 e t_2 S assume un valore minimo, massimo, o di sella) allora:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)=0$$

con $q(t_1)=q_1$ e $q(t_2)=q_2$ fissi.
La dimostrazione è semplice! Tutte le possibili curve orarie q(t), compatibili con il vincolo *$q(t_1)=q_1$ e $q(t_2)=q_2$*, si possono individuare con un parametro α in modo che:

$$q(t,\alpha)=q_0(t)+\alpha\eta(t)$$

dove $\eta(t)$ è una funzione arbitraria del tempo t che si *annulla* in per $t = t_1$ e $t = t_2$.
Poiché $S(\alpha)$, il parametro α con la sua variazione descrive i valori che l'*azione di Hamilton* S assume sulle varie curve orarie (o traiettorie) visualizzate in Fig. 9 nell'intervallo $[t_1, t_2]$, cioè descrive i *valori delle aree* di Fig. 10. Pertanto, derivando S rispetto ad α:

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2}L[q(\alpha,t),\dot{q}(\alpha,t),t]dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{d\alpha}L[q(\alpha,t),\dot{q}(\alpha,t),t]dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\eta(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t)\right)dt$$

Integrando per parti: $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}(t)dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta(t)dt=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta(t)dt$ perché $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$. Quindi:

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\eta(t)dt$$

Dovendo assumere $S(\alpha)$ un *valore stazionario* (minimo, massimo, ecc.) deve essere:

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}=0 \qquad \forall\eta(t)$$

per cui deve risultare:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

che è l'equazione di Lagrange.
La dimostrazione si può generalizzare al caso in cui la Lagrangiana dipende da più variabili, $q_1(t)$; $q_2(t)$; $q_3(t)$; ecc. Ognuna delle $q_i(t)$ genera una equazione di Lagrange.
Come esempio utile per familiarizzarsi con il Principio di Minima Azione si consideri *il moto di caduta di un grave sulla superficie terrestre* (si trascuri la resistenza dell'aria) da una altezza h. Come si sa da i corsi di fisica elementare le *equazioni orarie del moto reale* sono:

$$x_0(t)=v_{0x}t; \qquad y_0(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h$$

e le velocità:

$$\dot{x}_0(t)=v_{0x}; \qquad \dot{y}_0(t)=-gt$$

La lagrangiana L_0 del moto reale ha la forma:

$$L_0[x_0(t),y_0(t);\dot{x}_0(t),\dot{y}_0(t),t]=\frac{1}{2}m[\dot{x}_0^2(t)+\dot{y}_0^2(t)]-mgy_0(t)=mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_{0x}^2-mgh$$

con i vincoli:

$$x(t_1=0)=0,\ y(t_1=0)=h; \qquad x\left(t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)=0,\ y\left(t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)=0$$

L'azione del moto reale sarà data da:

$$S_0=S(\alpha=0)=\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} L_0[x_0(t),y_0(t);\dot{x}_0(t),\dot{y}_0(t),t]dt=\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\left(mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_{0x}^2-mgh\right)dt=\frac{1}{6}m\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(3v_{0x}^2-2gh\right)$$

Si considerino ora, come esempio, le funzioni:

$$\eta_x(t)=t\left(t-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right),\ \eta_y(t)=\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}t\right)$$

che hanno la proprietà di annullarsi agli istanti $t_1=0,\ \ t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Con queste funzioni si possono scrivere le *curve orarie variate* rispetto a $x_0(t)$ e $y_0(t)$:

$$x(\alpha,t)=x_0(t)+\alpha\eta_x(t),\ y(\alpha,t)=y_0(t)+\alpha\eta_y(t)$$

Pertanto l'azione del moto variata sarà:

$$S(\alpha)=\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} L\left[x(\alpha,t),y(\alpha,t);\dot{x}(\alpha,t),\dot{y}(\alpha,t),t\right]dt=S_0+$$

$$+m\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\frac{1}{2}\alpha^2\left[\dot{\eta}_x^2(t)+\dot{\eta}_y^2(t)\right]dt+m\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\alpha\left[\dot{\eta}_x(t)\dot{x}_0(t)+\dot{\eta}_y(t)\dot{y}_0(t)-g\eta_y(t)\right]dt$$

ed essendo: $m\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\alpha\left[\dot{\eta}_x(t)\dot{x}_0(t)+\dot{\eta}_y(t)\dot{y}_0(t)-g\eta_y(t)\right]dt=0$ si avrà:

$$S(\alpha)=\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}} L\left[x(\alpha,t),y(\alpha,t);\dot{x}(\alpha,t),\dot{y}(\alpha,t),t\right]dt=S_0+m\int_0^{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\frac{1}{2}\alpha^2\left[\dot{\eta}_x^2(t)+\dot{\eta}_y^2(t)\right]dt>S_0\quad\forall\alpha$$

In particolare:

$$S(\alpha)=S_0+\left(\frac{1}{3}+4\pi^2\right)\alpha^2m\sqrt{2\frac{h^3}{g^3}}$$

C'è un che di estetico, in questo Principio di Minima Azione, perché esso rappresenta non già un'ipotesi alternativa ma altrettanto *ad hoc* a quella delle equazioni di Lagrange, ma qualche cosa di più vasto, di più generale.
La Natura, nella forma della Meccanica, sceglie *solo e sempre* la traiettoria di *azione minima*, per i suoi sistemi. È intrigante: abbiamo un sistema fisico, abbiamo dei vincoli da soddisfare, e delle forze a cui esso viene sottoposto. Come si muoverà? Quale traiettoria percorrerà? Di tutte le infinite traiettorie *possibili*, sappiamo per esperienza che solo *una* verrà percorsa dal sistema (quella compatibile con le equazioni del moto). Ma *qual è* questa traiettoria? Non è una qualunque, non è una priva di caratteristiche particolari. È quella, l'*unica*, che *minimizza l'azione*.
Torniamo all'esempio di dover andare da casa a scuola. Abbiamo assunto, come in genere facciamo, che la Terra sia piatta. Ma così non è, e se ad esempio la casa è in Italia e la scuola in Canada la questione di *come* giungere da casa a scuola sarebbe particolarmente importante; perché la Terra non è piatta, e il concetto di "strada tutta

diritta" va opportunamente ridefinito. Il *vincolo*, in questo caso, di non poter abbandonare la superficie terrestre (ad esempio scavando un tunnel attraverso la crosta e il mantello terrestri per sbucare a scuola in Canada) deforma la geometria del problema, da piatta (euclidea) a sferica (stiamo assumendo, per semplicità, che la Terra sia una sfera). E pur tuttavia, la formulazione matematica sufficientemente generale del problema ci assicura che possiamo sempre calcolare la traiettoria di lunghezza *minima* anche in questo caso. Il problema, noto come problema di determinazione delle *geodetiche*, rivela che la traiettoria più breve che collega due punti posti su una superficie sferica (casa in Italia e scuola in Canada) è l'arco di circonferenza con centro nel centro della sfera stessa e che passa per i due punti (e che è sotteso da un angolo minore di 180°). Il segmento di retta che rappresentava la geodetica (linea di lunghezza *minima*) in una geometria piana, è diventato un arco di circonferenza in una geometria sferica. Tutto questo senza aver modificato la formulazione matematica del problema, semplicemente avendone modificato la geometria per effetto dei vincoli. Ecco perché il principio di minima azione è così importante.

Non importa quale sia il sistema fisico, non importa quali siano i vincoli, non importa quali siano le forze a cui è sottoposto, non importa quale sia e quanto complicata sia la geometria risultante del problema; il moto del sistema avviene *sempre* lungo la traiettoria che *minimizza* l'azione, purché essa sia data dalla lagrangiana del sistema. Non mancano i collegamenti con la Teoria Generale della Relatività, ma nemmeno con la Meccanica Quantistica. Non è un caso, infatti, che la famosa *costante di Planck h* sia anche detta *quanto d'azione* (e in effetti le sue dimensioni fisiche sono quelle di un'azione), perché nel mondo atomico l'azione delle particelle è *ragionevolmente confrontabile* con il valore di h.

La Meccanica Classica, nella sua formulazione lagrangiana, assicura che un dato sistema fisico evolverà nel tempo secondo una traiettoria che minimizza l'azione. Nulla dice, però, su quanto debba valere questa azione. Essa sarà *minima*, ma il suo valore dipenderà da sistema a sistema. Esso sarà il valore minimo possibile per quel sistema, che sarà in generale maggiore di zero (il caso banale di azione uguale a zero corrisponde al problema, assai poco interessante, di un sistema di cui si studia l'evoluzione per un tempo nullo o per un tempo indefinito ma il sistema stesso ha energia nulla, quindi di fatto non evolve). La Meccanica Quantistica, tramite il quanto d'azione *h*, dice invece qualche cosa di diverso: una particella che ubbidisca alle leggi della Meccanica Quantistica evolve secondo l'equazione di Schrödinger in modo tale da minimizzare anch'essa l'azione associata. Ma l'azione non può assumere un valore qualunque, può assumere solo valori che siano *multipli interi* della costante di Planck.

Storicamente va ricordato che fu il fisico e matematico francese Maupertuis ad introdurre l'azione e una prima formulazione del Principio di Minima Azione negli anni che vanno dal 1740 al 1745, e ciò dette inizio ad un vivace dibattito con Koenig e Volterra i quali accusarono Maupertuis di averlo copiato da Leibniz. In realtà, Maupertuis sintetizzò una discussione gia iniziata, dandone una formulazione più precisa nel suo principio, cosi come ammise anche lo stesso Eulero che formulò in modo matematico rigoroso il suo principio. Tra l'altro furono le misure condotte da Maupertuis, nella sua spedizione al Polo Nord nel 1736, della lunghezza dell'arco di meridiano corrispondente ad un grado di longitudine che mostrarono un valore minore della lunghezza dell'analogo all'equatore. Questo risultato sperimentale, confutò la teoria gravitazionale di contatto di Cartesio, spalancando le porte al successo della teoria gravitazionale a distanza di Newton.

Le leggi di conservazione della quantità di moto del momento angolare e dell'energia, utilizzando i principi di simmetria, vengono dedotti dalla formulazione lagrangiana della meccanica come segue:

a) Conservazione quantità di moto
Nelle ipotesi di omogeneità dello spazio le proprietà meccaniche di un sistema isolato non cambiano in una sua traslazione parallela qualsiasi nello spazio omogeneo. Consideriamo allora una traslazione infinitesima $\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$ che non muti la Lagrangiana[22]:

$$L(\vec{r}_i, \mathrm{v}_i, t) = L(\vec{r}_i + \vec{\varepsilon}, \mathrm{v}_i, t)$$

deve essere:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

quindi: $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$. L'Equazione di Lagrange porge:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i}} = 0$$

Ne segue che la quantità di moto totale del sistema isolato:

$$\vec{P}_{tot} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i}} = \text{costante}$$

b) Conservazione momento angolare
Nelle ipotesi di isotropia dello spazio le proprietà meccaniche di un sistema isolato non cambiano in una sua rotazione qualsiasi nello spazio isotropo. Consideriamo, analogamente a quanto fatto prima, il caso di una rotazione infinitesima del sistema fisico $\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i;\ \vec{\mathrm{v}}_i \to \vec{\mathrm{v}}_i + \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathrm{v}}_i$, che non muti la Lagrangiana[23]

$$L(\vec{r}_i, \vec{\mathrm{v}}_i, t) = L\left(\vec{r}_i + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i;\ \vec{\mathrm{v}}_i + \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathrm{v}}_i, t\right)$$

deve essere:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i} \cdot \delta \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} \right) = \sum_i \left[\dot{\vec{p}}_i \cdot \left(\delta\vec{\phi} \times \vec{r}_i \right) + \vec{p}_i \cdot \left(\delta\vec{\phi} \times \vec{\mathrm{v}}_i \right) \right] = 0$$

e considerando la proprietà vettoriale $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ otteniamo, dopo alcune semplici manipolazioni algebriche, il fondamentale risultato:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0$$

Cioè il momento angolare del sistema isolato:

$$\vec{L}_{tot} = \text{costante}$$

c) Conservazione energia
Nelle ipotesi di omogeneità del tempo la Lagrangiana non deve dipendere esplicitamente dal tempo, cioè operando la trasformazione temporale $t \to t + \tau$ la Lagrangiana non muta

$$L(\vec{r}_i, \vec{\mathrm{v}}_i) = L\left(\vec{r}_i + \vec{\mathrm{v}}_i \tau, \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} + \dot{\vec{\mathrm{v}}}_\mathrm{i} \tau\right)$$

perciò:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i} \cdot \delta \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} \right) = \tau \sum_i \left[\dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} + \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{\mathrm{v}}}_\mathrm{i} \right] = 0$$

quindi:

[22] Le velocità $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i}$ non sono alterate nella traslazione.

[23] Nella rotazione del sistema fisico, poi, cambia non solo la direzione dei raggi vettori dei punti materiali, ma anche quella delle loro velocità; e anche i vettori velocità si trasformano tutti secondo una stessa legge.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} - L\right) = 0$$

La quantità:

$$H = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} - L = \text{costante}$$

è l'energia totale del sistema.

9. IL LEGAME TRA OTTICA GEOMETRICA E MECCANICA DI UNA PARTICELLA

Esiste un importante legame tra ottica geometrica e meccanica di una particella che può essere trovato utilizzando i principi variazionale.

Innanzitutto se, il campo di forze che agisce su una particella è conservativo, allora l'energia meccanica

$$H = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + U = \text{costante}$$

una costante del moto, pertanto l'azione S della particella si scrive:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(m\mathrm{v}^2 - H\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} m\mathrm{v}^2 dt - H\left(t_2 - t_1\right) = \int_{P_1}^{P_2} p d\ell - H\left(t_2 - t_1\right)$$

dove P_1e P_2 sono i punti iniziali e finali della traiettoria della particella.

Quindi il Principio di Minima Azione per una particella che si muove in un campo di forza conservativo si scrive:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} p d\ell = 0$$

infatti, anche nella traiettoria variata, il termine $H\left(t_2 - t_1\right)$è lo stesso e quindi nella variazione δ scompare.

Se consideriamo la caduta di una particella nel campo gravitazionale terrestre, come mostrato in Fig.11:

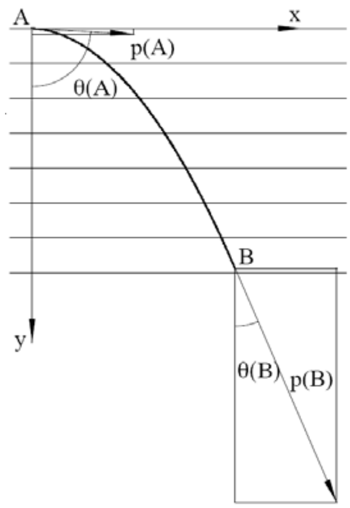


Fig. 11

è facile provare che è conservata la componente orizzontale dell'impulso:

$$p_A \sin \vartheta_A = p_B \sin \vartheta_B$$

con: $p_A = \sqrt{2m\left(H - U_A\right)}$, $p_B = \sqrt{2m\left(H - U_B\right)}$, e $U = mgy + \text{costante}$.

Ciò mostra una notevole somiglianza con la legge di rifrazione di Snell in ottica geometrica.
E' a tutti noto che Fermat riassunse l'ottica geometrica in un unico principio di minimo (1657):
Per giungere da un generico punto A dello spazio ad un altro punto B, la luce percorre sempre il cammino lungo il quale il cammino ottico è stazionario.
Consideriamo alcuni mezzi omogenei e isotropi (i.e. tre mezzi hanno rispettivamente indice di rifrazione n_1, n_2, n_3) in cui supponiamo che la luce descriva, nel primo mezzo il cammino ℓ_1, con velocità c_1, nel secondo mezzo il cammino ℓ_2 con velocità c_2, e nel terzo mezzo il cammino ℓ_3 con velocità c_3. Il tempo impiegato per percorrere la distanza totale $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ è dato da:

$$T = \frac{\ell_1}{c_1} + \frac{\ell_2}{c_2} + \frac{\ell_3}{c_3} = \frac{n_1\ell_1}{c} + \frac{n_2\ell_2}{c} + \frac{n_3\ell_3}{c}$$

Si definisce cammino ottico del raggio la quantità:

$$s = cT = n_1\ell_1 + n_2\ell_1 + n_3\ell_3$$

Se l'indice di rifrazione varia con continuità:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} n d\ell$$

Quindi il Principio di Fermat si scrive:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n d\ell = 0$$

Il Principio di Fermat può essere considerato l'analogo ottico del Principio di Minima Azione nella meccanica. Mentre il Principio di Minima Azione determina le possibili traiettorie delle particelle, il Principio di Fermat determina le traiettorie dei raggi nell'ottica geometrica. Si può affermare: Le orbite si "rifrangono" sulle superfici equipotenziali come i raggi di luce quando cambia l'indice di rifrazione.
Infatti, si può notare la corrispondenza formale:

MECCANICA CLASSICA	OTTICA GEOMETRICA
$\delta \int_{P_1}^{P_2} p d\ell = 0$	$\delta \int_{P_1}^{P_2} n d\ell = 0$
p	n
$p_A \sin \vartheta_A = p_B \sin \vartheta_B$	$n_A \sin \vartheta_A = n_B \sin \vartheta_B$

Tab. 2

Questa analogia si è rivelata storicamente fondamentale per la formulazione della Meccanica Quantistica. Infatti, fu de Broglie a formulare per primo l'idea che i due principi siano stessa. Ciò implica una stretta parentela tra il potenziale responsabile delle deviazioni della particella e l'indice di rifrazione responsabile delle deviazioni di un raggio luminoso dalla propagazione rettilinea.

10. IL PROBLEMA DI KEPLERO

Infine consideriamo l'argomento che ha dato origine al lavoro qui presentato. Il moto di corpi nello spazio è storicamente il problema intorno al quale si è sviluppata la meccanica moderna (ed anche gran parte della matematica moderna, come il calcolo differenziale). Nel caso in cui due soli corpi puntiformi interagiscono mediante una forza centrale, il problema è integrabile, perché possiede gli integrali del centro di massa, del momento angolare e dell'energia.

Questo problema è noto come "*il problema dei due corpi*" o anche come " *il problema di Keplero* ". Per problema dei due corpi intendiamo la descrizione del moto di due corpi puntiformi sotto l'azione della sole forze di interazione dei due corpi stessi, che si suppongono forze centrali per le quali valga la legge di azione e reazione .
Se indichiamo le posizioni dei due corpi con $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, le loro masse m_1 e m_2, la loro lagrangiana si scrive: $L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.
L non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia potenziale d'interazione dipende dal modulo della distanza reciproca delle masse, quindi:

- L'energia meccanica è conservata.
- L'impulso è conservato.
- Il momento angolare è conservato.

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2\right) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} M\dot{\vec{R}} = 0, \qquad \vec{P} = M\,\dot{\vec{R}} = const$$

dove $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ è il vettore posizione Centro di Massa, $\dot{\vec{R}} = \dfrac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}$ la sua velocità ed $M = m_1 + m_2$ la massa totale del sistema.
Ciò permette di assumere come SRI il Sistema di Riferimento centrato nel Centro di Massa.

$$\dot{\vec{R}} = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

in modo che:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \qquad m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0, \qquad \left(\vec{R} = 0\right)$$

cioè

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

In questo modo la Lagrangiana assume la forma:

$$L = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

dove $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la Massa Ridotta del sistema.

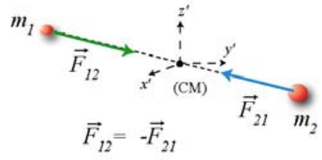


Fig. 12

L'equazione del moto di Lagrange risulta:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

Essa è identica all'equazione del moto di una particella di massa uguale a quella ridotta del sistema in un campo centrale $U(r)$, pertanto la conservazione della quantità di moto permette di ridurre il problema dei due corpi ad uno solo. Si osservi che $\vec{r}$ rappresenta la posizione della particella 1 in un Sistema di Riferimento O_2 in cui la particella 2 è a riposo. Il fatto che nell'equazione del moto di Lagrange compaia la massa ridotta μ in luogo della massa m_1 corrisponde alla circostanza che il un Sistema di Riferimento O_2 non è inerziale. Nel limite $m_2 >> m_1$ (caso di Keplero: Sole –Pianeta), $\vec{r} \cong \vec{R}$, la particella 2 viene a trovarsi a riposo nel Centro di Massa; I due sistemi di riferimento si identificano e $\mu \cong m_1$.

La conservazione del momento angolare, perché $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ in quanto la forza $\vec{F}$, esercitata dalla particella 1 sulla particella 2, è una forza centrale, comporta che l'orbita giaccia in un piano perché $\vec{r}$ è sempre perpendicolare al momento angolare $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, con $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$, perché la direzione e il verso di $\vec{l}$ sono costanti.

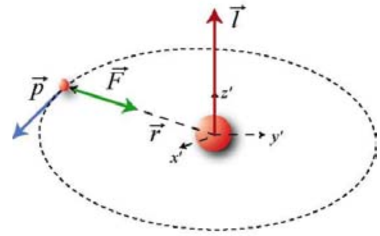


Fig. 13

E' notevole dal punto di vista storico ricordare che l'atomismo fece il suo vero ingresso in fisica quando furono trovate le leggi matematiche capaci di farci comprendere alcune importanti proprietà degli atomi, cosa che accadde quando la teoria del moto dei pianeti trovò applicazione a livello atomico. E' un fatto di straordinario interesse che per problemi fisici così diversi siano possibili trattazioni matematiche quasi eguali. In entrambi i casi si parte dallo studio del moto di un punto materiale in un campo centrale descrivibile dall'energia potenziale $U(r) = \frac{\gamma}{r}$,dove $\gamma = \begin{cases} -GmM & \text{problema di Keplero} \\ 2Ze^2 & \text{problema di Rutherford} \\ -Ze^2 & \text{problema di Bohr} \end{cases}$.

Infatti, lo studio matematico degli effetti generati da questa energia potenziale d'interazione ha permesso di risolvere i problemi relativi a situazioni fisiche molto diverse.
Lo studio di questi problemi è interessante perché:

- serve ad evidenziare la natura stessa della fisica teorica, che trae da uno straordinario connubio fra buon senso qualitativo e ragionamento matematico rigoroso la sua fantastica capacità di penetrazione nel mondo materiale;
- rende irreversibile l'accettazione dell'atomismo permettendo di far luce sulla struttura interna degli atomi;
- spinge a fare i conti con gli stessi limiti della fisica classica, evidenziati dal fatto che l'atomo di Rutherford non sarebbe affatto stabile se l'elettrodinamica classica fosse completamente applicabile al mondo atomico.

11. L'UNITA' DEL CIELO E DELLA TERRA

Il cielo e i corpi che lo popolano sono la pagina del libro della Natura che l'uomo ha cercato di "leggere" fin da epoche antichissime per motivi non solo culturali e religiosi, ma anche per motivi estremamente pratici:
a) rilevanza delle stagioni per l'agricoltura, quindi la produzione di cibo e la sopravvivenza

b) spettacolarità dei fenomeni celesti e preoccupazione per la loro inspiegabilità (e.g. eclissi di sole….).
Se di notte osserviamo per un certo tempo le stelle di un settore del cielo e le riferiamo ad un sistema di punti fissi sull'orizzonte (e.g. un campanile..) notiamo che si spostano tutte uniformemente nello stesso senso del moto apparente del Sole, da levante verso ponente (1 giro in 23h 56m: il giorno sidereo) ,ma sempre restando fisse le une rispetto alle altre in "configurazioni" immutabili (le costellazioni). Oltre al Sole e alla Luna, pochissimi puntini visibili ad occhio nudo (5, fino alla notte del 13 marzo 1781 quando fu scoperto Urano) si muovono rispetto a tutti gli altri, compiendo strani percorsi nel cielo, a volte addirittura muovendosi all'indietro rispetto ad essi (moti retrogradi).

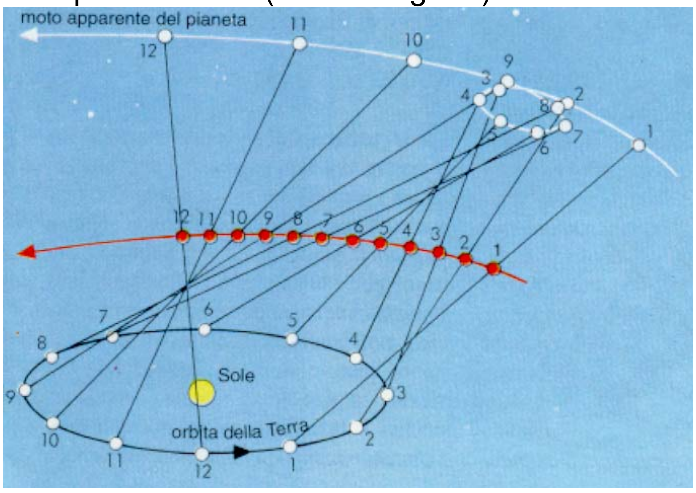
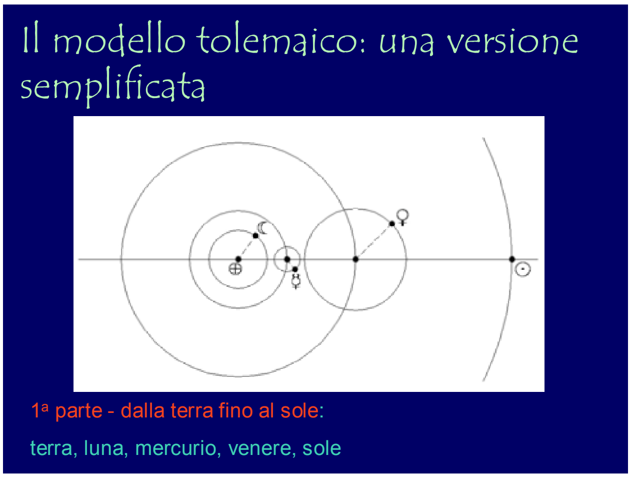


Fig. 14

I movimenti delle 5 "stelle erranti" si ripetono sempre uguali a se stessi (moti periodici…o quasi), è proprio dal periodico sorgere, culminare e tramontare del Sole (giorno solare) che nasce il concetto stesso di tempo e di orologio (costruire un orologio richiede di disporre di un fenomeno che si ripete sempre uguale a se stesso: il sorgere del Sole, il movimento di un pendolo, le precise vibrazioni di materiali piezoelettrici come il quarzo usati oggi nei normali orologi da polso), quindi di misura del tempo.
La difficoltà non sono le osservazioni (che possono essere accurate proprio grazie alla periodicità)…ma includerle in un unico modello geometrico capace di avere valore predittivo… Non più quindi una teoria con criteri di verità al proprio interno, ma una teoria da cui emergono previsioni che possono essere confermate o smentite al di fuori di essa.
Ecco di seguito la visione di Platone (IV secolo a.C.): "Le stelle rappresentano oggetti eterni, divini ed immutabili, si muovono con velocità uniforme attorno alla terra –come noi possiamo constatare– e descrivono la più regolare e perfetta di tutte le traiettorie: quella della circonferenza senza fine. Ma alcuni oggetti celesti (il sole, la luna e i pianeti) vagano attraverso il cielo e seguono cammini complessi, con l'inclusione anche di moti retrogradi…. Tuttavia, essendo corpi celesti, anch'essi debbono sicuramente muoversi in maniera conforme al loro rango elevato: i loro moti devono perciò derivare da una qualche combinazione di cerchi perfetti, dal momento che non descrivono esattamente dei cerchi perfetti ". Tolomeo nel 150 d.C. nell'ALMAGESTO [intitolata originariamente *Megalé mathematiké sýntaxis* (Grande sistema matematico), venne tradotta in arabo col titolo di *Al-Majisti*]si pone il seguente problema:" Quali sono le combinazioni di moti circolari, con velocità uniforme, che possono spiegare tali peculiari variazioni a partire da un insieme coerente di moti regolari nel cielo?" Tolomeo risponde a questa domanda creando un modello (in 3-D) per il moto dei 7 corpi celesti "non fissi" dal quale è possibile predire la posizione dei pianeti nel cielo per molti anni con un errore < 2° !!!!! I sistema tolemaico prevede che la Terra è ferma al centro dell'universo e intorno a essa ruotano, su sfere concentriche e in ordine di distanza, la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove,

Saturno e le cosiddette stelle fisse. Le osservazioni sui moti dei pianeti vengono spiegate sul piano teorico assumendo, cinematicamente, che questi ultimi percorrano orbite circolari, dette epicicli, il centro delle quali si muove a sua volta attorno al Sole su traiettorie circolari chiamate deferenti. Il moto di tutte le sfere è da ovest verso est.



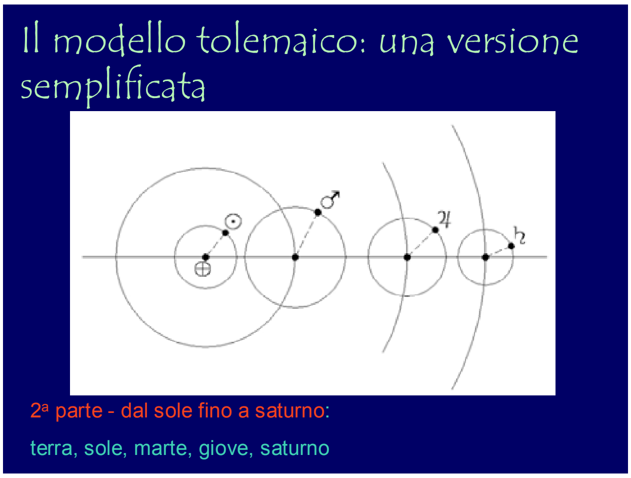


Fig. 15

Il pianeta si muove a velocità angolare costante sull'epiciclo, il cui centro a sua volta gira a velocità angolare costante sul deferente che è centrato sulla terra.

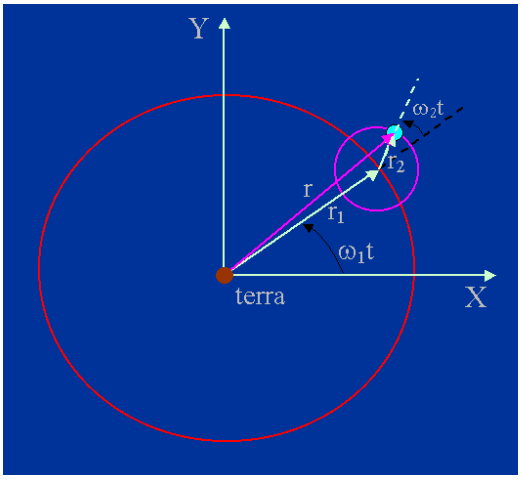


Fig. 16

In Fig. 16 r_1, ω_1 sono rispettivamente raggio e velocità angolare del deferente e r_2, ω_2 sono rispettivamente raggio e velocità angolare dell'epiciclo, ω_1 si misura a partire dall'asse X, ω_2 si misura a partire dalla direzione terra-centro del deferente (lungo r_1). Utilizzando il teorema del coseno possiamo scrivere per il vettore posizione Terra – Pianeta:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\pi - \omega_2 t) = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\omega_2 t)$$

e per il teorema sul triangolo rettangolo:

$$r \sin \theta = r_2 \sin(\omega_2 t)$$

dove θ è l'angolo formato tra r ed r_1. …. E basta variare con ω_1 ω_2 r_1 r_2 per cominciare ad ottenere qualcosa che assomiglia ai moti irregolari che si osservano nel cielo:

- anelli (i.e. moto retrogrado) con orbita chiusa (risonanza)
- anelli con orbita aperta
- orbita del sole con equinozi non equidistanti (velocità angolare variabile, eccentrici ed equanti … e volendo anche orbita ellittica..).

I calcoli di Tolomeo sono sempre fatti rispetto alla Terra, che quindi si trova sempre nell'origine delle coordinate.

In Fig. 17 è mostrato come possano generarsi dei moti retrogradi (Ci vogliono almeno 2 frequenze –velocità angolari– indipendenti !!)

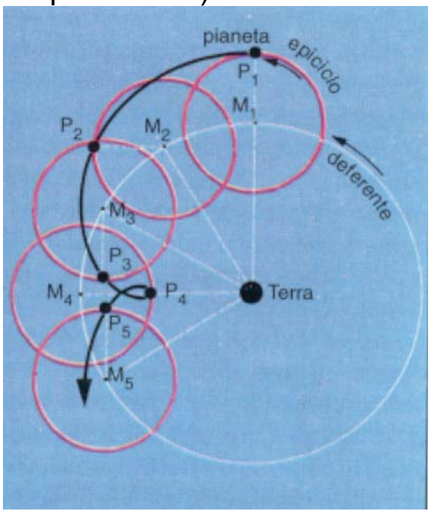


Fig. 17

Tuttavia, con una eccentricità del 20% l'orbita di Mercurio poneva seri problemi….
Copernico, che studia in Italia (BO e PD) dal 1497 al 1503, nota che nel modello tolemaico il moto di ogni pianeta contiene sempre la velocità angolare del Sole (2π/1 anno), e quindi conviene prendere lo stesso deferente (quello del Sole) per tutti i pianeti [il deferente del Sole è essenzialmente l'orbita del Sole attorno alla Terra, cioè in effetti l'orbita della Terra attorno al Sole (nota come "eclittica", quindi il suo raggio medio è la distanza media Terra-Sole (unità astronomica $\cong$ 150 milioni di km)] e siccome tutte le osservazioni sono misure di angoli, conviene prendere il raggio del deferente del Sole = 1 ed esprimere i raggi di tutte le altre circonferenze (deferenti, epicicli etc..) in unità del raggio del deferente del Sole. Dal 1510 circola un compendio "Commentariolus" dove sono esposte le idee di Copernico che calcola il moto di ogni pianeta rispetto al Sole equivale, matematicamente, a tenere fermo il Sole e a porre l'origine del sistema di coordinate nel suo centro anziché nel centro della Terra. Per timore dell'Inquisizione ecclesiastica, Copernico acconsente alla pubblicazione del "De revolutionibus orbium coelestium ",solo nel 1543 anno della sua morte. Il modello di Copernico è senz'altro esteticamente più elegante di quello di Tolomeo,anche se non tanto meno complicato visto che usa sempre moti circolari uniformi per descrivere orbite in realtà ellittiche e percorse a velocità angolare non uniforme. Copernico non dispone di osservazioni più sistematiche e accurate di quelle di Tolomeo, e la precisione delle previsioni basate sul suo modello non è migliore di quelle basate sul modello Tolemaico!
Tuttavia, se non viene interpretato in senso puramente matematico, il modello di Copernico costringe a cambiare radicalmente la visione dell'universo, a cominciare dalle sue dimensioni. Se davvero il Sole è fermo nell'origine e la Terra gli gira intorno, allora come è possibile che le stelle, viste dalla Terra, occupino sempre le stesse posizioni nel cielo? Dovrebbero invece mostrare un moto periodico con il periodo del moto della Terra attorno al Sole (1 anno). Copernico risponde nell'unico modo possibile:le stelle sono molto più distanti da noi di quanto noi distiamo dal Sole (1 AU=150 milioni di km), e quindi il loro moto periodico dovuto allo spostamento delle Terra nel suo moto intorno al Sole ("parallasse annua") è di fatto impercettibile. Bisogna, quindi, accettare l'idea di un Universo molto più grande di quanto non si fosse creduto fino ad allora. In Inghilterra il pensiero di Copernico è accettato con entusiasmo e si pensa addirittura ad un Universo infinito….

Circa trent'anni più tardi la morte di Copernico, l'astronomo danese Tycho Brahe[24] compie delle osservazioni sistematiche con l'accuratezza di 2' presso l'osservatorio di URANIBORG. In Europa è il primo osservatorio astronomico in senso moderno (antecedente la scoperta del telescopio) in quanto è interamente supportato dallo stato (Federico II di Danimarca) e dedicato ad una raccolta sistematica di osservazioni astronomiche incluso un catalogo stellare di circa 1000 oggetti. Gli strumenti includono quadranti, misuratori di parallasse, sfere armillari, astrolabi, tutti costruiti con grande accuratezza.

L'accuratezza delle misure di Tycho mettono in crisi sia Tolomeo che Copernico! Dall'analisi dei dati di Tycho da parte di Keplero, il quale nel 1599 aveva ottenuto i dati, emerge una discrepanza di 8' nella longitudine di Marte (e=0.09), poi ridotta a 2' con l'introduzione di orbite ellittiche. Keplero ha anche delle perplessità sugli epicicli: come può un centro vuoto esercitare forze? Comincia a porsi il problema delle cause del moto. Nel 1609 Keplero pubblica l' "Astronomia Nova" dove espone le sue famose tre leggi sui moti planetari.

Le 3 leggi di Keplero, come è noto, sono:

1. Legge delle orbite ellittiche (ogni pianeta si muove attorno al Sole su un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi)

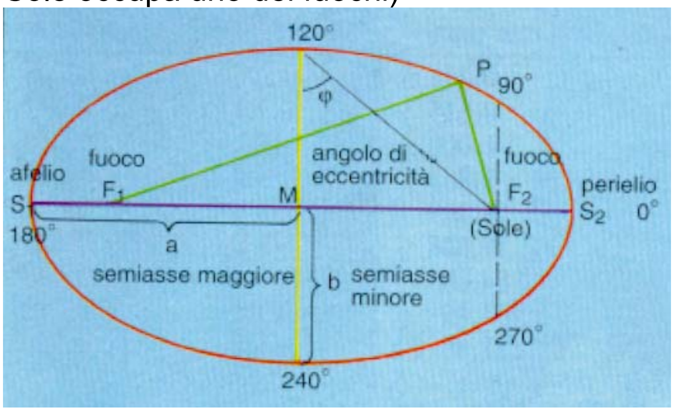


Fig. 18

2. Legge delle aree (il raggio vettore Sole-pianeta spazza aree uguali in tempi uguali ⇒ il pianeta gira più velocemente al perielio che non all'afelio)

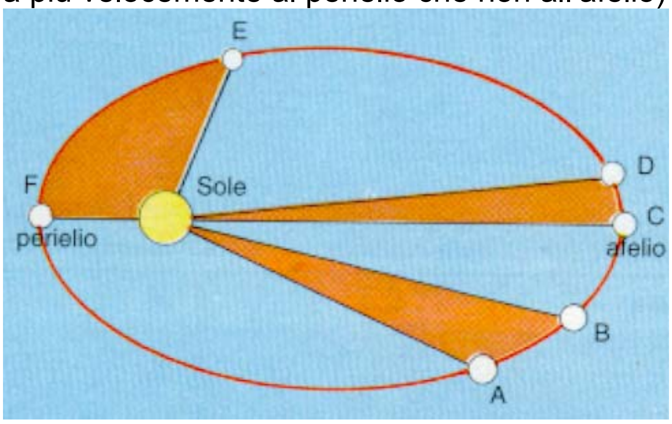


Fig. 19

[24] Le fortune di Tycho presso Federico II derivano dalla fama acquisita per la scoperta di una "nova" nella costellazione di Cassiopea (1572): minava completamente la convinzione della immutabilità dei corpi celesti (si trattava di una supernova…). Tycho dimostra anche che la cometa del 1577 è più lontana della Luna e quindi non può essere un fenomeno dell'atmosfera terrestre….come invece si credeva.

3. T^2/a^3=costante per tutti I pianeti (il rapporto tra I quadrato del periodo orbitale e il cubo del semiasse maggiore –il semiasse maggiore è il raggio medio dell'orbita ellittica del pianeta attorno al Sole– è lo stesso per tutti i pianeti)

Per quanto detto nel paragrafo precedente, in realtà si dimostra che

$$T^2/a^3=\text{costante} \times (M_{Sole}+ m_{pianeta})$$

quindi questo rapporto non è esattamente lo stesso per tutti I pianeti … però siccome tutti i pianeti hanno una massa << M_{Sole} , l'affermazione di Keplero era sostanzialmente corretta. La validità delle leggi di Keplero è davvero impressionante perché le orbite dei pianeti sono con ottima precisione delle ellissi e si resta molto colpiti a pensare che una delle curve ottenute da Apollonio intersecando un cono con piani di diversa inclinazione possa riprodurre così bene il moto dei corpi celesti. Nessuna altra curva semplice gode di questa proprietà, solo l'ellisse. Keplero era profondamente convinto che l'universo fosse stato concepito da un Essere Superiore che aveva seguito un disegno razionale e armonioso, scopribile con i metodi della scienza. Perciò la sua mente si cimentò lungamente con il problema di spiegare il numero (sei) di pianeti e giunse ad una risposta degna delle facoltà di un dio: i pianeti sono sei perché i solidi regolari sono cinque (tetraedro, esaedro, ottaedro, icosaedro, dodecaedro), più la sfera, ed ogni orbita planetaria è inserita in un'"intercapedine sferica" (la regione di spazio compresa fra due sfere concentriche centrate sul Sole e molto vicino l'una all'altra) inscritta e/o circoscritta ad uno dei solidi regolari. Naturalmente oggi sappiamo che il modello di Keplero non funziona, ad esempio perché abbiamo scoperto altri pianeti, mentre i solidi regolari restano cinque più la sfera. Tuttavia la sua esigenza di spiegare razionalmente sia i movimenti dei pianeti, che il loro numero e la loro distanza dal Sole era dal suo punto di vista, perfettamente legittima. Oggi sappiamo che esistono risposte razionali al movimento, mentre non esiste alcuna a quello della struttura. Infatti, la struttura del sistema planetario è governato da eventi accidentali: distribuzione spaziale e delle velocità della materia nella nebulosa proto solare, interazione con altre stelle passate casualmente vicine al Sole, ecc. Quando la storia di un sistema gioca un ruolo importante nel determinarne le proprietà una descrizione matematica semplice è probabilmente impossibile.

Galileo costruisce immediatamente una versione più precisa del cannocchiale(importato dall'Olanda nel 1608), strumento da utilizzare per osservazioni astronomiche (continua a modificarlo raggiungendo ottimi risultati…). Infatti, Galileo compie sistematiche osservazioni dei satelliti di Giove e questo gli permette di rafforzare la sua convinzione nel sostenere la teoria copernicana (Giove con i suoi satelliti non è che un mini-sistema solare in miniatura e lo studio di tale sistema è un utilissimo "laboratorio di prova" per le teorie copernicane – kepleriane), mentre osserva il sistema di Giove vede anche Nettuno (nel 1613!), più di 2 secoli prima che venisse scoperto (1845). Osserva la Luna e scopre che non è perfetta (stima, dalle ombre, le dimensioni delle "anomalie" – monti e valli), che il Sole ruota (lo deduce dalle osservazioni delle macchie solari), e che Il disco di Venere mostra delle fasi compatibili con un suo moto di rivoluzione attorno al Sole: questa rappresenta una prova osservativa a favore del modello copernicano inoppugnabile. Se il modello tolemaico avesse avuto ragione si sarebbero dovute osservare dalla Terra soltanto falci di Venere e mai Venere piena. Le osservazioni di Galileo fanno presagire una unità tra fenomeni terrestri e celesti, la prova di questa unità la darà Newton che nasce nel 1642, lo stesso in cui muore Galileo.

Nel 1679, l'allora segretario della Royal Society Robert Hooke, in una lettera indirizzata a Newton, aveva posto il problema "di comporre i moti celesti dei pianeti con un moto rettilineo tangenziale e con un moto attrattivo verso il corpo centrale". Infatti, Hooke , fin dal 1667, aveva intuito la causa dei moti planetari, ma non era stato in grado di andare avanti al di là della formulazione qualitativa dell'idea. Nel 1684 l'architetto londinese Christopher Wren offrì un premio in denaro per la sua soluzione e fu così che il giovane astronomo Edmund Halley decise di visitare Newton per porgli ancora una volta la stessa questione ricevendo da quest'ultimo la risposta che quasi vent'anni prima aveva dimostrato che un'orbita ellittica per un pianeta era la conseguenza necessaria di una forza che variava in proporzione inversa al quadrato della distanza. Dato che Newton non trovava più la dimostrazione di questo teorema Halley lo implorò di farla nuovamente e di scriverla. La dimostrazione di questo teorema fu pubblicata nei PHILOSOPHIE NATURALIS PRINCIPIA MATEMATICA che furono stampati nel 1687 a spese di Halley, perché la Royal Society non aveva fondi e perché Hooke, il suo presidente, avanzava pretese sulla priorità della scoperta della legge dell'inverso del quadrato della distanza per la forza gravitazionale. "*Nessuna altra opera nell'intera storia della fisica eguaglia i PRINCIPIA per l'importanza dei risultati raggiunti, perché la fisica celeste e quella terrestre potevano essere unificate una sola volta. Nei principia la rivoluzione scientifica giunse irreversibilmente all'acquisizione dei metodi geometrici e matematici come strumenti di razionalizzazione diretta. Qui la fisica di Galileo e le leggi di Keplero si fusero in una sintesi teorica armoniosa in cui la legge di gravitazione universale giocava il ruolo centrale.*"[25]

12. LA LEGGE DI GRAVITAZIONE DEDOTTA DALLE LEGGI DI KEPLERO

Sia dato un corpo puntiforme A (un pianeta) e siano x e y le sue coordinate cartesiane ortogonali ed ρ e ϑ le sue coordinate polari.

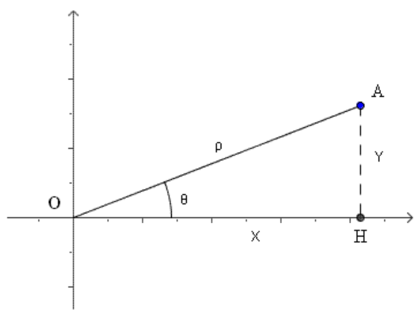


Fig. 20

Come è noto:

$$x = \rho \cos \vartheta; \qquad y = \rho \sin \vartheta \tag{4}$$

Quindi il vettore posizione di A $\vec{r}$ orientato dall'origine O ad A si scrive:

$$\vec{r} = \rho\left(\cos \vartheta \hat{x} + \sin \vartheta \hat{y}\right) \tag{5}$$

Si noti che nella (5) la quantità in parentesi è il versore $\hat{n}_1$ orientato come $\vec{r}$:

$$\hat{n}_1 = \cos \vartheta \hat{x} + \sin \vartheta \hat{y} \tag{6}$$

mentre il versore $\hat{n}_2$ definito da:

$$\hat{n}_2 = -\sin \vartheta \hat{x} + \cos \vartheta \hat{y} \tag{7}$$

è perpendicolare ad $\hat{n}_1$, infatti come si può verificare dalla (6) e (7):

$$\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = 0 \tag{8}$$

Dalla (5) e dalla (6) consegue:

$$\vec{r} = \rho \hat{n}_1 \tag{9}$$

Risulta pure:

$$\frac{d\hat{n}_1}{dt} = \dot{\vartheta} \hat{n}_2; \qquad \frac{d\hat{n}_2}{dt} = -\dot{\vartheta} \hat{n}_1 \tag{10}$$

[25] **F. Selleri** "La fisica del Novecento. Per un bilancio critico" Progedit Bari 1999

e quindi la velocità di A :

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{n}_1 + \rho\dot{\vartheta}\hat{n}_2 \tag{11}$$

La velocità risulta così scomposta: la parte "radiale" (termine che contiene $\hat{n}_1$) e la parte "trasversale" (termine che contiene $\hat{n}_2$) perpendicolare alla parte radiale.
Per l'accelerazione si ha poi:

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2\right)\hat{n}_1 + \frac{1}{\rho}\left[\frac{d\left(\rho^2\dot{\vartheta}\right)}{dt}\right]\hat{n}_2 \tag{12}$$

e anch'essa è scomposta in due parti: quella "radiale" (termine che contiene $\hat{n}_1$) e quella "trasversale" (termine che contiene $\hat{n}_2$) perpendicolare alla parte radiale.
Per la definizione stessa di ellisse, detti F ed F' i due fuochi della conica risulta:

$$FA + F'A = 2a$$

cioè:

$$\rho + \rho' = 2a \tag{13}$$

con $2a = C'C$ asse maggiore dell'ellisse.

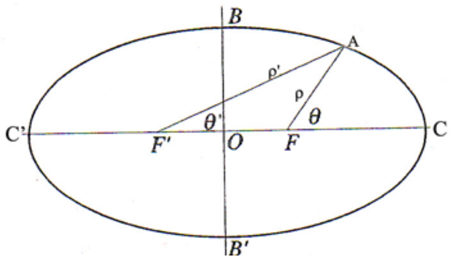


Fig. 21

Dalla Fig. 21 seguono subito due relazioni:

$$\begin{cases} \rho'\cos\vartheta' - \rho\cos\vartheta = 2c \\ \rho'\sin\vartheta' = \rho\sin\vartheta \end{cases} \tag{14}$$

con $2c = F'F$ doppio della distanza focale.
Quadrando e sommando le due relazioni (14) e ricordando che dalla (13) si ottiene $\rho' = 2a - \rho$, otteniamo dopo opportune semplificazioni l'equazione dell'ellisse in coordinate polari:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta} \tag{15}$$

in cui $p = a\left(1 - \varepsilon^2\right)$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$, cioè rispettivamente parametro ed eccentricità dell'ellisse.

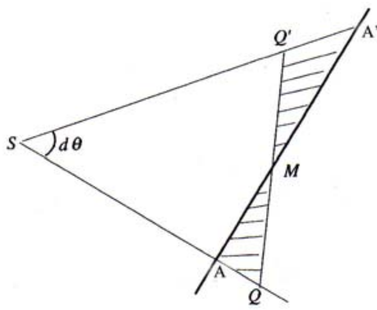


Fig. 22

Con riferimento alla Fig. 22 sia A la posizione del pianeta al tempo t . Dopo un certo intervallo di tempo dt il pianeta sia giunto nel punto A', avendo descritto il tratto di ellisse AA'.

In corrispondenza il raggio vettore $\vec{r}$ si sposta da SA ad SA' (S è il Sole che occupa uno dei fuochi) descrivendo l'angolo $d\vartheta$. Sia M il punto medio dell'arco AA' e siano Q e Q' le intersezioni con le rette SA ed SA'. Poiché sia dt che $d\vartheta$ sono quantità molto piccole (infinitesime)allora gli archi AA' e QQ' sono da considerarsi rettilinei.
Posto $dA = \text{Area}(\text{SAA'})$, questa quantità risulta essere:

$$dA \approx \text{Area}(\text{SQQ'}) = \frac{1}{2} \cdot \rho d\vartheta \cdot \rho$$

perché $\rho d\vartheta$ è la base di SQQ' e $SM \approx \rho$ ne è l'altezza. Pertanto la velocità areolare $\frac{dA}{dt}$ del pianeta è:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\vartheta} \tag{16}$$

Pertanto la seconda legge di Keplero si scrive:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h \tag{17}$$

dove h è una costante. Pertanto confrontando la (16) e la (17) si scrive:

$$\rho^2\dot{\vartheta} = h \tag{18}$$

e quindi:

$$\dot{\vartheta} = \frac{h}{\rho^2} \tag{19}$$

Le (18) e (19) comportano che l'accelerazione del pianeta data dalla (12) risulti priva della componente trasversale e abbia solo quella radiale:

$$\vec{\text{a}} = \left(\ddot{\rho} - \frac{h^2}{\rho^3}\right)\hat{n}_1 \tag{20}$$

Ora differenziando rispetto al tempo l'equazione dell'ellisse (15), si ottiene, con l'aiuto della (19):

$$\dot{\rho} = \frac{h\varepsilon}{p}\sin\vartheta \tag{21}$$

differenziando ancora una seconda volta rispetto al tempo la (21) con l'aiuto della (15) e della (19) si ottiene:

$$\ddot{\rho} = \frac{h}{p}\left(\frac{p}{\rho} - 1\right)\frac{h}{\rho^2} \tag{22}$$

Sostituendo questo risultato nella (20) otteniamo l'importantissimo risultato:

$$\vec{\text{a}} = \left(-\frac{h^2/p}{\rho^2}\right)\hat{n}_1 \tag{23}$$

L'accelerazione di ogni pianeta punta sempre verso il Sole ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal Sole.

Dimostreremo ora, utilizzando la terza legge di Keplero, che il coefficiente $\frac{h^2}{p}$ nella (23*) è lo stesso per tutti i pianeti*. Infatti la terza legge di Keplero afferma che:

$$\frac{a^3}{T^2} = K(\text{costante}) \tag{24}$$

con a semiasse maggiore della ellisse e T periodo di rivoluzione del pianeta.
Utilizzando la (24) la (17) fornisce l'area $A = \pi ab$ della ellisse, infatti si ha:

$$\frac{h}{2}T = \pi ab \qquad (25)$$

in cui $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ è il semiasse minore dell'ellisse. Essendo $p = a\left(1-\varepsilon^2\right)$,allora la (25) si scrive:

$$\frac{h}{2}T = \pi a^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} \qquad (26)$$

pertanto:

$$\frac{a^3}{T^2} = K = \frac{h^2}{4\pi^2 p} \qquad (27)$$

da cui l'accelerazione del pianeta, utilizzando la (23), risulta :

$$\vec{a} = \left(-\frac{4\pi^2 K}{\rho^2}\right)\hat{n}_1 \qquad (28)$$

Se un pianeta viene fermato per un istante: $\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\dot{\rho} = 0, \rho\dot{\vartheta} = 0\right) \Rightarrow h = 0 \Rightarrow A = 0$, l'ellisse degenera in un segmento (A=0), tuttavia l'accelerazione (28) rimane invariata. Pertanto: *Ogni pianeta in ogni punto della sua orbita ha esattamente l'accelerazione verso il Sole che avrebbe se gli stesse cadendo sopra*. Questo porta a concludere che l'accelerazione dei corpi che si muovono sotto l'influenza del Sole dipende solo dalla distanza e non dalla massa, né dalla forma dell'orbita percorsa, né dalla velocità istantanea. Ecco dunque un importantissimo elemento di unificazione fra la Terra e il Cielo! Galileo aveva dimostrato che i corpi sulla superficie terrestre hanno un'accelerazione che è sempre la stessa indipendentemente dalla massa, forma e sostanza. Lo aveva fatto in tre modi:

- Gettando corpi di peso diverso da una torre.
- Con i suoi famosi esperimenti sui piani inclinati.
- Con l'esperimento ideale delle due masse diverse legate ad una funicella.

Newton dimostrò che la stessa proprietà valeva in cielo, stabilendo un primo straordinario elemento di unificazione fra cielo e terra, e sbriciolando quei residui di antropocentrismo che la fisica aristotelica aveva lasciato nella cultura dei suoi tempi.
Da queste considerazioni si può derivare la legge della forza di gravitazione.
Infatti da $\vec{F} = m\vec{a}$, ne segue che le forze planetarie sono sempre radiali, cioè dirette verso il Sole, quindi per la (28) si ottiene:

$$\vec{F} = -4\pi^2 K\left(\frac{m}{\rho^2}\right)\hat{n}_1 \qquad (29)$$

Ora, applicando la terza legge della dinamica , i ruoli di Sole e pianeta sono scambiati, è ovvio che deve essere: $\vec{F}' \propto \frac{M_{Sole}}{\rho^2}\hat{n}_1$, con $\vec{F}' = -\vec{F}$. Newton scrisse:

$$\vec{F} = -G\frac{mM_{Sole}}{\rho^2}\hat{n}_1 \qquad (30)$$

dove G = $6.672 \cdot 10^{-11}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$ è la costante di Gravitazione Universale.
Pertanto la costante K assume il seguente valore:

$$K = \frac{GM_{Sole}}{4\pi^2} \qquad (31)$$

Newton verificò la dipendenza di K dal corpo centrale esaminando il moto dei satelliti di Giove, il secondo sistema planetario dei suoi tempi.
La derivazione dell'espressione (30) della forza di gravitazione è un esempio dell'uso epistemologico della seconda legge della dinamica $\vec{F} = m\vec{a}$. Nel presente contesto, l'uso di $\vec{F} = m\vec{a}$ è non di legge, ma di definizione di forza. Infatti, se c'è la possibilità di

specificare in maniera *indipendente* le proprietà di quella grandezza (nel caso specifico $\vec{F}$) dalle altre grandezze fisiche (nel caso specifico $m\vec{a}$) che intervengono nell'uguaglianza, allora l'uguaglianza *esprimerà una legge fisica* (nel caso specifico $\vec{F}=m\vec{a}$) cioè *esprimerà una proprietà del mondo*, ovvero una relazione di natura teorico – sperimentale tra le grandezze in questione *non logicamente deducibile* nel contesto teorico in cui si sta operando. Il rispetto dell'uguaglianza è decisa dal *controllo sperimentale* nel senso più ampio del termine.
Se, invece, l'uguaglianza è utilizzata per dedurre le proprietà di quella grandezza (nel caso specifico $\vec{F}$), avendo soltanto specificato le proprietà delle rimanenti (nel caso specifico $m\vec{a}$), allora l'uguaglianza (nel caso specifico $\vec{F}=m\vec{a}$) *esprimerà una definizione* di quella grandezza (nel caso specifico $\vec{F}$). Allora come tale l'uguaglianza *non esprimerà una proprietà del mondo* e quindi *non potrà essere sottoposta a controllo sperimentale* perché risulterà semplicemente *sempre vera*.

Quasi sempre in fisica, le proprietà di $\vec{F}$ sono dedotte da misure sulla variazione di quantità di moto delle particelle. Così è stato anche dal punto di vista storico per la legge di gravitazione universale e lo è stato per la Forza di Lorentz. E' raro (solo nei casi più elementari) eseguire una misura *statica* di forza e dedurre da questa misure un' espressione analitica di $\vec{F}$ e inserirla nell'uguaglianza $\vec{F}=m\vec{a}$ e sottoporla a verifica sperimentale!

13. LE COSTANTI DEL MOTO E LA FORMA GEOMETRICA DELLE ORBITE

Poiché la forza gravitazionale è una forza centrale e l'energia potenziale gravitazionale è:

$$U(\rho)=-\frac{GM_{Sole}m}{\rho} \tag{32}$$

come gia detto in precedenza le costanti del moto sono il momento angolare $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{\mathrm{v}}$ del pianeta e la sua energia totale $H=\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2+U(\rho)$. Ora risulta per la (9) e (11) che $\vec{L}=m\rho^2\dot{\vartheta}\hat{n}_3$, dove $\hat{n}_3=\hat{n}_1\times\hat{n}_2$ è il versore perpendicolare al piano dell'orbita. Ricordando la (18), otteniamo:

$$h=\frac{L}{m} \tag{33}$$

Inoltre utilizzando la (33), per la (27) e per la (31), risulta:

$$p=\frac{L^2}{GM_{Sole}m^2};\quad \frac{h}{p}=\frac{GM_{Sole}M}{L} \tag{34}$$

Infine, utilizzando la (11), la (32), la (15) e la (21), troviamo:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2=\frac{1}{2}\frac{G^2M_{Sole}^2m^3}{L^2}\left(1+2\varepsilon\cos\vartheta+\varepsilon^2\right);\qquad U(\rho)=-\frac{G^2M_{Sole}^2m^3}{L^2}\left(1+\varepsilon\cos\vartheta\right) \tag{35}$$

quindi l'energia totale H:

$$H=\frac{G^2M_{Sole}^2m^3}{2L^2}\left(\varepsilon^2-1\right) \tag{36}$$

Poiché, l'eccentricità dell'ellisse è $0\le\varepsilon<1$, l'energia totale $H<0$, come deve essere per uno stato legato (Sole – pianeta). Nel caso di un'orbita circolare, $\varepsilon=0$, è $H_{circ}=-\frac{G^2M_{Sole}^2m^3}{2L^2}$. Le equazioni (15) e (36) valgono formalmente anche per le altre due coniche: parabola, $\varepsilon = 1$, ed iperbole, $\varepsilon > 1$. Tuttavia, in questi ultimi due casi è $H \geq 0$, come deve essere per orbite di oggetti non legati tra loro.

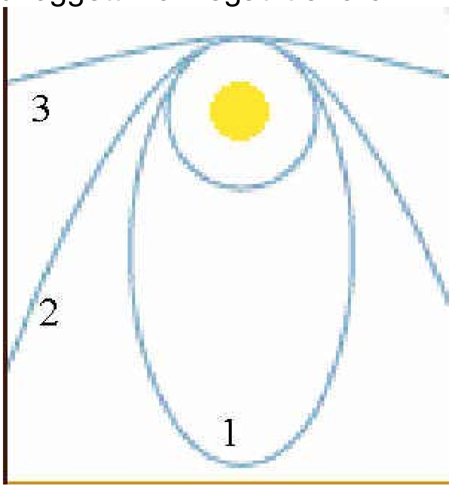


Fig. 23
1: ELLISSE; 2: PARABOLA; 3: IPERBOLE

Possiamo anche trovare il semiasse maggiore dell'orbita ellittica, da $p = a\left(1-\varepsilon^2\right)$, da (34) e (36), si ottiene:

$$a = -\frac{GM_{Sole}m}{2H} \tag{37}$$

Per il semiasse minore $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ si ottiene:

$$b = \frac{L}{\sqrt{2m|H|}} \tag{38}$$

14. IPOTESI NELLA DEDUZIONE DELLA FORZA GRAVITAZIONALE

Nel dedurre la legge di gravitazione universale (30) vengono, spesso tacitamente, due ipotesi:

1. Una massa non scherma l'attrazione gravitazionale
2. La massa del Sole o del pianeta sferici è supposta concentrata in un punto (centro della sfera)

1. Quando il Sole tramonta la sua forza gravitazionale sui corpi attorno a noi viene esercitata attraverso l'enorme massa terrestre. Se l'attrazione solare risultasse indebolita dovremmo osservare bruschi sobbalzi, ma questi consono mai stati osservati.

La massa del Sole è $M_{Sole} = 1.989 \cdot 10^{30}\,kg$, quella della Luna è: $m_{Luna} = 7.35 \cdot 10^{22}\,kg$, mentre le loro distanze medie dalla Terra sono: $\rho_{Sole-Terra} = 1.496 \cdot 10^{11}\,m;\qquad \rho_{Luna-Terra} = 3.844 \cdot 10^{8}\,m$.

Le accelerazioni di un corpo sulla superficie terrestre dovute rispettivamente alla sola attrazione solare e lunare sono:

$$a_{Sole} = \frac{GM_{Sole}}{\rho^2_{Sole-Terra}} = 5{,}93\frac{mm}{s^2};\qquad a_{Luna} = \frac{Gm_{Luna}}{\rho^2_{Luna-Terra}} = 0{,}033\frac{mm}{s^2} << a_{Sole} \tag{39}$$

Dunque l'azione della Luna più di cento volte inferiore a quella del Sole. Un efficiente schermaggio del campo gravitazionale solare da parte della massa della Terra dovrebbe far cessare all'improvviso un'accelerazione di circa 6mm/s^2, provocando controaccelerazioni della stessa entità, e poiché questi effetti gravitazionali si propagherebbero alla velocità della luce, i sobbalzi dovrebbero verificarsi durante la sparizione ottica del Sole dietro l'orizzonte. Dato che effetti di questo genere non sono stati mai osservati in accurate ricerche, si conclude che il ricoprimento di una massa da parte di un'altra non scherma gli effetti gravitazionali della prima.

2. Si consideri la Fig.24 e sia $\lambda(r)$ la densità di massa di un corpo sferico.

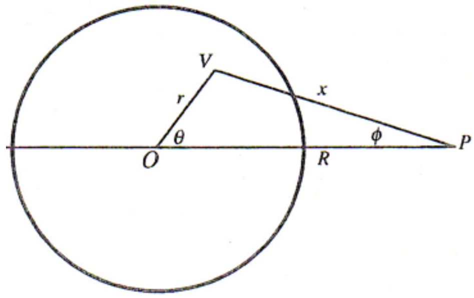


Fig. 24

Il generico elemento di volume in coordinate polari, ed il corrispondente elemento di massa sono:

$$d^3V = r^2 dr d(\cos\vartheta) d\varphi; \qquad d^3m = \lambda(r) d^3V \tag{40}$$

La massa del corpo sferico si scrive:

$$M_S = \int_0^{R_S}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \lambda(r) r^2 dr d(\cos\vartheta) d\varphi = 4\pi \int_0^{R_S} \lambda(r) r^2 dr \tag{41}$$

La forza gravitazionale attrattiva, nella direzione PO, esercitata dall'elemento di massa d^3m, centrato nel punto V, su un punto materiale P di massa m_0 vale:

$$d^3F_{PO} = \frac{Gm_0 d^3m}{x^2}\cos\phi \tag{42}$$

infatti, per motivi di simmetria, si cancella la componente perpendicolare a PO a causa del contributo fornito simmetricamente da un eguale elemento di massa d^3m posizionato in $r, \vartheta, \phi + \pi$. Da notare che si assume valido quanto detto al punto1., perché si è assunto che la massa d^3m attiri m_0 come se non fosse schermata dalla parte di massa della sfera che si frappone fra d^3m e m_0.

Applicando due volte il teorema del coseno al triangolo OVP , otteniamo:

$$\cos\phi = \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx}; \qquad \cos\vartheta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2Rr}$$

Sostituendo nella (42) e integrando rispetto a φ, che non interviene in alcun modo nella (42) , si ha:

$$d^2F_{PO} = 2\pi G m_0 \lambda(r) r^2 dr \left(\frac{-x dx}{Rr}\right)\frac{R^2 - r^2 + x^2}{2Rx^3}$$

integrando nuovamente rispetto a x:

$$dF_{PO} = 2\pi G m_0 \lambda(r) r dr \int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2 - r^2 + x^2}{x^2}\right)dx = \frac{4\pi G m_0}{R^2}\lambda(r) r^2 dr$$

Infine integrando su r:

$$F_{PO} = \frac{4\pi G m_0}{R^2}\int_0^{R_S}\lambda(r) r^2 dr = \frac{G M_S m_0}{R^2} \tag{43}$$

La (43) ci assicura che *la massa sferica M_S agisce sulla massa m_0 posta in P come se fosse tutta concentrata nel suo centro O*.

15. LEGGI DI KEPLERO: LA BILANCIA DEL CIELO

La determinazione della massa dei corpi celesti è una delle misurazioni in assoluto più difficili da effettuare, non tanto per difficoltà teoriche, quanto per vere e proprie difficoltà osservative.

La misura della massa è il normale passo in avanti nello studio dei corpi del sistema solare; essa è utile per capire moltissime cose, tra le quali, le più importanti sono:

1) Determinazione esatta orbite, in particolare del centro di massa;
2) Determinazione della densità media e quindi della composizione chimica, nonché prime ipotesi sulla struttura interna e sulla stessa dinamica del pianeta, come eventuale presenza di un campo magnetico, presenza ed eventuale evoluzione dell'atmosfera;
3) Importanti indizi sulla nascita ed evoluzione del sistema solare, a partire dalle condizioni della sua nascita;
4) Importanti conseguenza direttamente sull'astronautica; conoscere la massa di un corpo celeste è assolutamente condizione necessaria affinché si possa inviare con successo una sonda nella sua orbita o nella sua superficie.
5) Conoscere la massa del Sole o della nostra Luna significa avere importanti informazioni sull'evoluzione stellare e sul noto fenomeno delle maree.

Ci sono sostanzialmente 3 metodi per il calcolo della massa, ed essi sono, dal più grossolano al più preciso:

1) Stima della densità media di un corpo; con questo dato e il suo raggio, siamo in grado di ricavarci la massa, come: $M = \lambda V$, dove V è il volume e λ è densità media del pianeta; questo è in assoluto il dato più sensibile ad errori; infatti la densità media di un pianeta dipende sia dalla composizione chimica media (effetto di differenziazione), sia dall'effetto di compressione gravitazionale della materia contenuta nel suo interno, che dipende dalla sua massa. Questo metodo è molto approssimato, ma alcune volte è l'unico in grado di darci qualche risposta.
2) Terza legge di Keplero: attraverso questa legge, possiamo determinare con ottima precisione sia la massa del nostro Sole, che la massa di qualunque corpo celeste che possiede un satellite molto meno massiccio. Questa tecnica consente anche di determinare la massa della Luna, anche se è richiesta la conoscenza della massa del nostro pianeta.
3) Accelerazione di gravità: misurando l'accelerazione media di gravità del corpo celeste, siamo facilmente in grado di calcolare accuratamente la sua massa; nonostante questo sia il metodo più preciso, è anche il più difficile da attuare, poiché bisogna conoscere l'accelerazione di gravità. Se questo è facile da realizzare sulla Terra, non lo è altrettanto per tutti gli altri corpi celesti a noi lontani; l'unico modo è di inviare una sonda verso il corpo da esplorare ed analizzare con quale accelerazione essa ne viene attratta. E' chiaro però che, per non sprecare una costosissima sonda solo per un'accurata misura della massa del pianeta la massa dell'oggetto sia già nota, o almeno stimata; questo metodo quindi può essere efficacemente utilizzato solamente per migliorare (a volte di molto) precedenti misure, oppure mediante possibili misure spettroscopiche della luce inviata dai pianeti, almeno quelli del Sistema Solare.

Utilizzando la terza legge di Keplero, si può calcolare la massa del Sole. Infatti dalla terza legge:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{Sole}}{4\pi^2}$$

Noti i periodi di rivoluzione T e le distanze medie , a , dei pianeti dal Sole si ottiene:

Pianeta	T	r	Ms
Mercurio	88 • 86400 s	57.6 • 10^9 m	1.95556 • 10^{30} Kg
Venere	224.7 • 86400 s	108.2 • 10^9 m	1.98832 • 10^{30} Kg
Terra	365.26 • 86400 s	149.6 • 10^9 m	1.9888 • 10^{30} Kg
Marte	687 • 86400 s	227.9 • 10^9 m	1.9876 • 10^{30} Kg
Giove	11.86 • 86400 • 365.26 s	760.3 • 10^9 m	1.99102 • 10^{30} Kg
Saturno	29.46 • 86400 • 365.26 s	1427 • 10^9 m	1.9889 • 10^{30} Kg
Urano	84.01 • 86400 • 365.26 s	2870.1 • 10^9 m	1.9899 • 10^{30} Kg
Nettuno	164.8 • 86400 •365.26 s	4498.6 • 10^9 m	1.991 • 10^{30} Kg
Plutone	247.7 • 86400 • 365.26 s	5900 • 10^9 m	1.9884 • 10^{30} Kg
			MEDIA: 1,9855 • 10^{30} Kg SEMIDISPERSIONE RELATIVA PERCENTUALE: 0.90 %

Tab. 3

Pertanto la massa del Sole è: $M_{Sole} = \left(1.98 \pm 0.02\right) \cdot 10^{30}\text{kg}$.

La massa della Terra, supposta sferica, è possibile calcolarla mediante misure di accelerazione di gravità $\vec{g}$ e del suo raggio R. Infatti da $g = \frac{GM_{Terra}}{R^2_{Terra}}$ si ottiene:

$$M_{Terra} = \frac{R^2_{Terra}}{G} g = \frac{\left(6.378 \cdot 10^6 m\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 5.976 \cdot 10^{24} kg$$

Ottenuta la massa della Terra con l'uso dell'accelerazione di gravità, la terza legge di Keplero per calcolare la massa della Luna. Tuttavia, in questo caso, non è possibile usare la formula approssimata $\frac{a^3_{Luna-Terra}}{T^2_{Luna}} = \frac{GM_{Terra}}{4\pi^2}$, perché ora la massa del satellite Luna non è più trascurabile rispetto alla massa della Terra. Pertanto bisogna far uso della relazione corretta $\frac{a^3_{Luna-Terra}}{T^2_{Luna}} = \frac{G\left(M_{Terra} + m_{Luna}\right)}{4\pi^2}$.[26]

Infatti, nel caso in cui le masse dei due corpi siano paragonabili, come già abbiamo avuto modo di osservare al paragrafo 10, interviene il concetto di massa ridotta del sistema Terra-Luna.

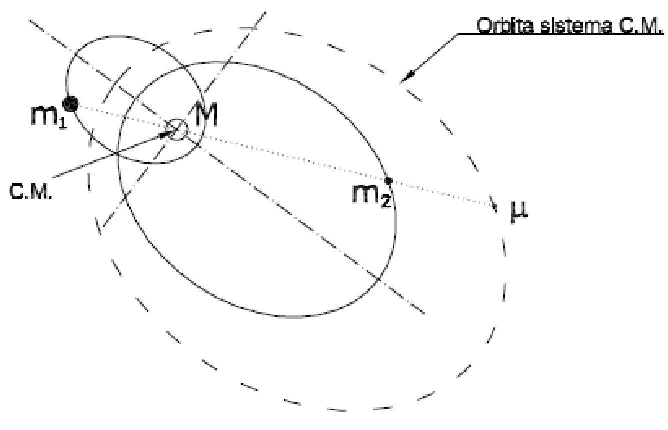


Fig. 25

$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ **massa ridotta;** $M = m_1 + m_2$ **massa totale;** $a = a_1 + a_2$ **semiasse maggiore dell''ellisse descritta da** μ

[26] Lo studio del motondel satellite della Terra dal punto di vista della meccanica celeste è un problema assai complicato se si vuole raggiungere una precisione confrontabile con le osservazioni

Si ha $T_{Luna} = 27.5^d = 2.376 \cdot 10^6 s$, $r_{Terra-Luna} = 3.844 \cdot 10^8 m$, mentre il centro di massa del sistema Terra–Luna è situato all'interno della Terra ad una distanza $r_{Centro\,Terra-CM} = 4.650 \cdot 10^6 m$, come stabilito dalle osservazioni dell'asteroide Eros e dalle perturbazioni nel moto dei satelliti artificiali.Quindi:

$$a_{CM-Luna} = r_{Terra-Luna} + \left(R_{Terra} - r_{Centro\,Terra-CM}\right) = 3.844 \cdot 10^8 m + 1.728 \cdot 10^6 m = 3.861 \cdot 10^8 m$$

Da cui segue che la massa della Luna è: $m_{Luna} = 6.88 \cdot 10^{22} kg$.

Per quanto riguarda i pianeti, essi, ad esclusione di Mercurio e Venere, hanno da uno (la Terra) a dozzine di satelliti che gli ruotano attorno; alcuni satelliti sono piccoli e densi come l'acqua, e quindi con una massa veramente esigua se confrontata con quella dei loro pianeti. I satelliti di Marte sono due asteroidi di pochi Km di diametro, mentre, sebbene Giove ospiti i satelliti più grandi del sistema solare, la loro massa è ben poca cosa se confrontata con un gigante del genere; stessa cosa vale per tutti gli altri pianeti, ad esclusione, ancora una volta, di Plutone e Caronte. Per quest'ultimi, la configurazione che si presenta è simile al caso Luna-Terra, le masse dei due corpi celesti sono confrontabili e quindi la legge di Keplero ci fornisce la massa totale del sistema, non le singole masse; per separare i due contributi si devono trovare altre vie, che non sono molto difficili, almeno per il sistema Plutone Caronte, ammettendo di conoscere raggio, distanza e assumendo una composizione chimica uguale.
Combinando quindi la legge di Keplero per il sistema Pianeta-Sole con quella Pianeta-Satellite, assumendo trascurabili le perturbazioni sui due moti orbitali (satellite e satellite+pianeta-Sole), e scegliendo un satellite con una massa molto inferiore al pianeta, siamo in grado di arrivare ad una relazione molto importante. Infatti, si considerino le formule:

$$\frac{a^3_{Pianeta-Sole}}{T^2_{Pianeta}} = \frac{G\left(M_{Sole} + m_{Pianeta}\right)}{4\pi^2}; \quad \frac{a^3_{Pianeta-Satellite}}{T^2_{Satellite}} = \frac{G\left(m_{Pianeta} + m_{Satellite}\right)}{4\pi^2}$$

dividendo membro a membro e sviluppando si ottiene:

$$\frac{T^2_{Pianeta}}{T^2_{Satellite}} = \frac{a^3_{Sole-Pianeta} m_{Pianeta}\left(1 + \frac{m_{Satellite}}{m_{Pianeta}}\right)}{a^3_{Pianeta-Satellite} M_{Sole}\left(1 + \frac{m_{Pianeta}}{M_{Sole}}\right)} \simeq \frac{a^3_{Sole-Pianeta} m_{Pianeta}}{a^3_{Pianeta-Satellite} M_{Sole}}$$

Quindi il sistema di due equazioni nelle incognite M_{Sole} e $m_{Pianeta}$:

$$\begin{cases} \dfrac{M_{Sole}}{m_{Pianeta}} = \dfrac{a^3_{Sole-Pianeta} \cdot T^2_{Satellite}}{a^3_{Pianeta-Satellite} \cdot T^2_{Pianeta}} \\ M_{Sole} + m_{Pianeta} = \dfrac{4\pi^2}{G} \dfrac{a^3_{Pianeta-Sole}}{T^2_{Pianeta}} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ricaviamo entrambe le masse. I risultati che si ottengono sono molto attendibili, e la loro accuratezza dipende sostanzialmente dai dati inseriti e dall'usare masse planetarie molto minori di quella solare e masse dei satelliti molto minori di quelle dei pianeti (almeno 1000 volte).
La formula non può essere applicata al sistema Terra-Luna e Plutone-Caronte, in quanto non vengono soddisfatte le condizioni delle masse. La precisione raggiunta è grande per pianeti tipo Marte, Urano e nettuno e tutti i corpi celesti che hanno piccoli satelliti (molti asteroidi e KBO) , mentre per Giove e Saturno, le cui masse non sono così piccole se comparate al Sole, il risultato può essere migliorato, in particolare per Giove.
Tuttavia, per pianeti che non possiedono satelliti, l'unico metodo per conoscere con

sufficiente precisione la loro massa; è proprio quello di inviare sonde verso di loro. In questo modo sono state misurate le masse di Venere e Mercurio, quando negli anni 70 le sonde Mariner passarono nelle loro vicinanze.
Dopo aver detto della massa dei pianeti, della Terra, della Luna e del Sole, consideriamo la massa delle stelle. La struttura di una stella è determinata in primo luogo dalla sua massa, composizione chimica ed età. Le masse delle stelle, tranne in casi rari, si possono determinare quando fanno parte di sistemi doppi o multipli. Più del 60% delle stelle della nostra Galassia sono gravitazionalmente legate e formano sistemi binari. Pertanto, se si riescono a misurare i loro parametri orbitali, si possono determinare le masse.
I sistemi binari, generalmente, hanno orbite ellittiche attorno al loro Centro di Massa (CM) che è sempre posizionato in uno dei fuochi. Le loro posizioni sono sempre connesse da una linea retta che passa attraverso il CM. Entrambe le stelle hanno lo stesso periodo orbitale.

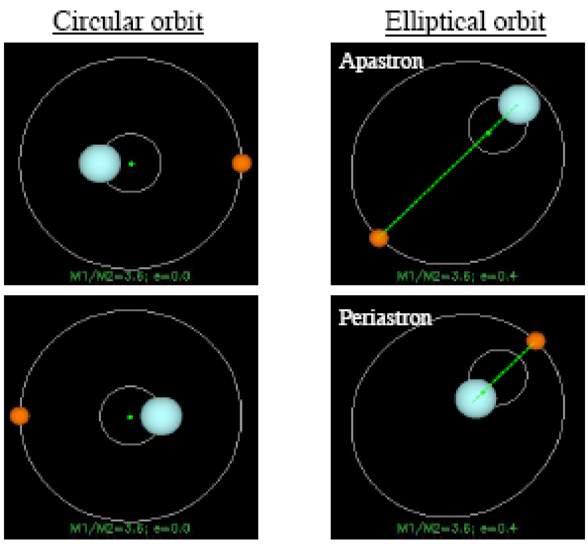


Fig. 26
Esempi di orbite

Se il CM è posizionato nell'origine del sistema di coordinate, vale la relazione:

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

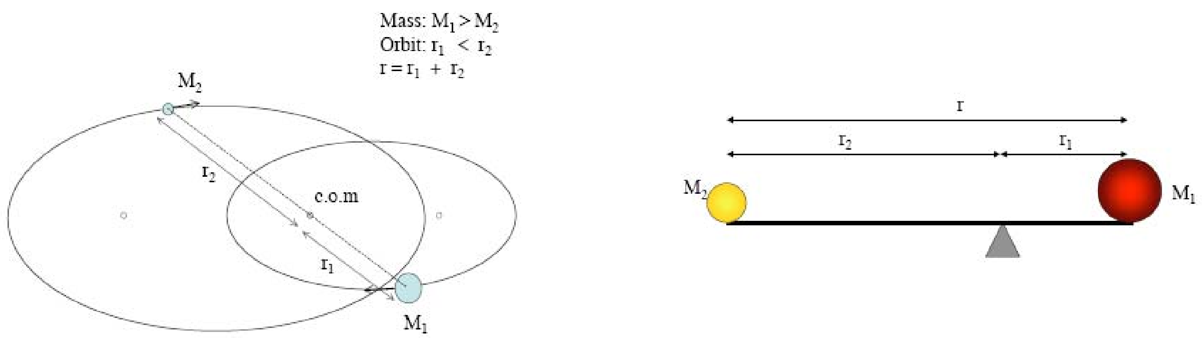


Fig. 27
CM e posizione stelle

Come esempio, consideriamo il sistema binario visuale, le cui stelle cioè, sono risolte al telescopio, 70 Ophiuchi.

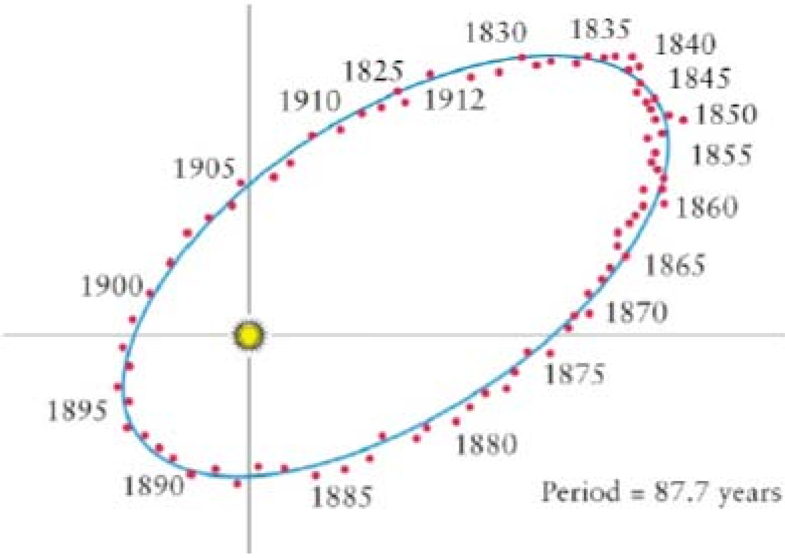


Fig. 28
Il sistema binario visuale 70 OPHIUCHI

Il sistema binario visuale 70 Ophiuchi ha un angolo di parallasse di $196\cdot10^{-3}arcs$.

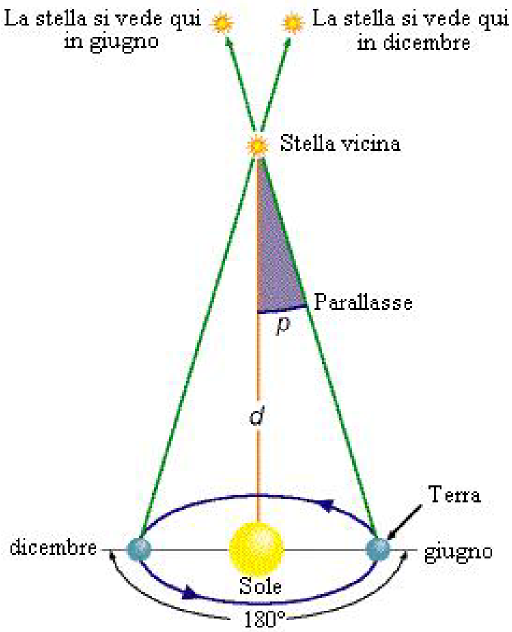


Fig. 29
Definizione di parallasse

$$\tan p = \frac{1\text{U.A.}}{d} \cong p(rad)$$

$$d(A.U.) \cong \frac{1}{p(rad)} = \frac{2.0625\cdot10^5}{p(arcs)}$$

$$1\,pc = \frac{2.0625\cdot10^5}{1\,arcs}AU = 3.0857\cdot10^{16}\,m = 3.2616\,anniluce$$

$$d(pc) = \frac{1}{p(arcs)}$$

Pertanto la distanza di 70 Ophiuchi è data da: $d(pc) = \dfrac{1}{196\cdot10^{-3}arcs} = 5.2\,pc$. Il semiasse maggiore dell'orbita ottenuto dalle osservazioni è:

$$\vartheta_a = 4.56arcs = 4.56arcs\cdot\frac{1\,primo}{60arcs}\cdot\frac{1^\circ}{60\,primi}\,\frac{2\pi rad}{360^\circ} = 2.21\cdot10^{-5}rad$$

Quindi le dimensioni lineari del semiasse maggiore dell'ellisse sono: $a = \vartheta_a \cdot d(pc) = 1.15 \cdot 10^{-4}\,pc = 23.7\,U.A. = 3.53 \cdot 10^{12}\,m$, essendo $1U.A. = 1.49 \cdot 10^{11}\,m$. Essendo il periodo $T = 87{,}7\,anni = 2.80 \cdot 10^{9}\,s$, applicando la terza legge di Keplero:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

otteniamo la somma delle masse del sistema binario 70 Ophiuchi: $M_1 + M_2 = 3.32 \cdot 10^{30}\,kg = 1.7 M_{Sole}$. Per avere le singole masse delle stelle è necessario avere altre informazioni che si ricavano dalla misura della luminosità e dalle analisi degli spettri emessi dalle singole stelle.

Infine, esaminiamo il grafico della velocità di rivoluzione dei pianeti intorno al Sole in funzione della distanza da esso e la curva di rotazione della nostra galassia.

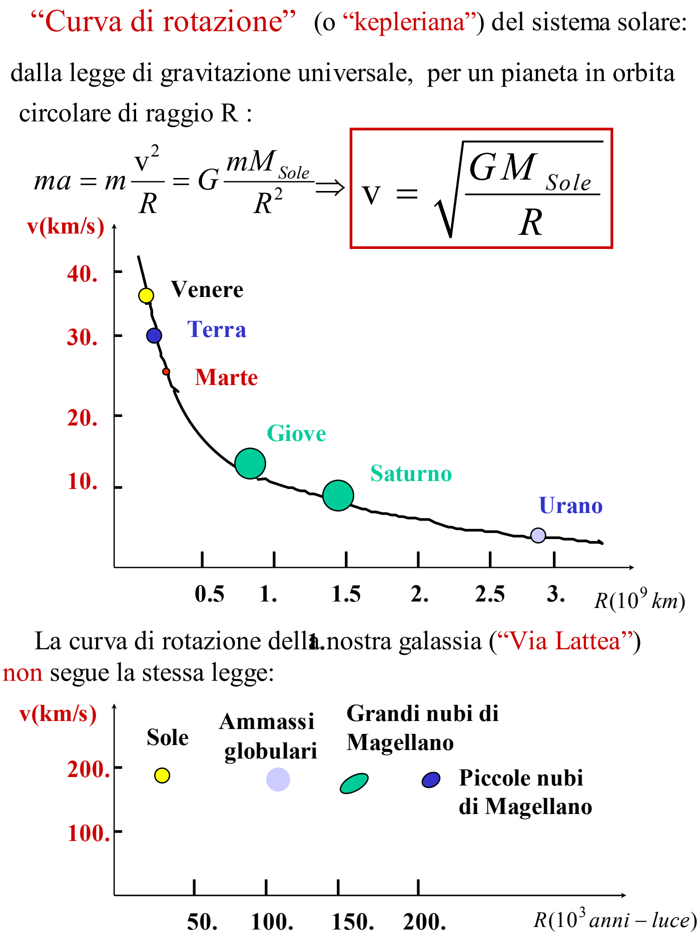


Fig. 30

Le due curve differiscono sensibilmente!

- Per spiegare l'*andamento di v(r)* delle stelle nelle galassie, misurato dall'osservazione del *'redshift'* degli spettri di emissione**,** è necessario ammettere l'esistenza di materia oscura nelle Galassie, e in generale nell'Universo. Se non ci fosse più materia oltre $r_{visibile}$, ci si deve aspettare una decrescita (kepleriana) della velocita' come succede nel sistema solare.
- Il fatto che V rimanga costante per r> $r_{visibile}$, significa che M cresce proporzionalmente con r.
- *C'è dunque della materia anche ben oltre il raggio visibile. Questa materia è oscura, nel senso che non emette luce.*
- La sua presenza è dedotta dagli effetti gravitazionali.

- Si valuta che la materia oscura nell' universo sia dieci volte più abbondante della materia ordinaria (cosiddetta barionica).

La natura della materia oscura è al momento ignota. La sua comprensione e' uno dei problemi più interessanti della fisica di questo momento.
Ancora una volta le leggi Keplero sono la fonte di una nuova rivoluzione nella fisica e nell'astronomia, come lo furono nel 1600?