

# La Matematica della Fisica

Carlo Bernardini

Ferrara dicembre 2009

# STRUMENTI MATEMATICI DELLA FISICA

1 – Ci sono due filoni che promuovono gli sviluppi più importanti della fisica fenomenologica dell'800, alla quale siamo ancora profondamente legati e debitori per la densità di “significato fisico” contenuta nella relativa matematica:

- Sistemi dinamici lineari e reti di oscillatori accoppiati (dai modi normali alla nozione di pseudo- o quasi-particelle; teoria dei reticoli elastici e delle reti elettriche).
- Equazione delle onde con sorgente; funzione di Green, propagatori, scattering e diffrazione in approssimazione di Born, nozione di “mediatore”, superamento del terzo principio e diagrammi di Feynman.

# RETI DI OSCILLATORI

2 – Reti di oscillatori accoppiati non smorzati:

$$m_j \ddot{x}_j = \sum_k a_{jk} (x_j - x_k)$$

$$a_{jk} = a_{kj} \geq 0, \text{ reale}$$

da cui segue:

$$\sum_k a_{jk} \xi_k = \lambda \xi_j$$

$$\det \left[ a_{jk} - \lambda \delta_{jk} \right] = 0$$

$$\lambda = -\omega_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_k a_{jk} \xi_k = \lambda \xi_j \rightarrow A \vec{\xi} = \lambda \vec{\xi} \rightarrow A = A^+ \rightarrow \lambda \text{ reale}$$

# Gas di Modi normali

3 – E' il primo problema importante agli autovalori della fisica dei sistemi dinamici. Ovviamente, la generalizzazione tridimensionale delle equazioni è immediata.

Le combinazioni lineari di coordinate atomiche che si comportano come oscillatori semplici sono le quasi-particelle. C'è uno spettro di frequenze e la termodinamica del solido corrispondente è quella di un gas di pseudoparticelle indipendenti in una scatola (calore specifico di Debye, per esempio).

# Funzione di Green

4 – Il problema delle onde uscenti da una sorgente - che abbandonano andandosene all'infinito - nel caso monocromatico di sorgenti oscillanti su una ben definita frequenza  $\omega$  si risolve con la tecnica inventata da George Green (mugnaio a Nottingham, 1793-1841); è, appunto, la tecnica della "funzione di Green" che rappresenta la propagazione dell'onda nello spazio fuori dalla sorgente, verso l'infinito (condizioni al contorno = onde uscenti).

# “Propagatore”

5 –

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = S(\vec{x}, t)$$

$$S(\vec{x}, t) = s(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad , \quad \omega = kc$$

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$\psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} e^{-i\omega t} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|} s(x')$$

6 – Per questo buon motivo, la funzione di Green prende il nome di “propagatore”, e così pure la sua trasformata di Fourier.

Vorrei fare notare che sto usando una funzione che Green nemmeno si sognava di conoscere, la cosiddetta “funzione di Dirac” che entrò in uso solo negli anni '30 del '900 come “funzione generalizzata”: ora la usiamo tranquillamente, senza traumi, nei corsi universitari, sottintendendo alcuni processi di limite impliciti.

La trasformata di Fourier di

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

è semplicemente

$$\tilde{G}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 - k^2}$$

La rilettura di Feynman di questa formula è molto interessante per i “significati” che produce. Questa rilettura è più perspicua se la riferiamo alla soluzione in approssimazione di Born del problema della diffrazione-scattering. In quel caso, la “sorgente” delle onde uscenti da un centro di potenziale è la stessa onda entrante (un’onda piana monocromatica che proviene dall’infinito) viene diffratta e produce onde sferiche uscenti che se ne vanno verso qualche rivelatore a grande distanza (rispetto alle dimensioni del diffrattore).

In questo caso l'equazione si trasforma in una equazione integrale:

$$s(\vec{x}) = U(\vec{x})\psi(\vec{x})$$

$$\psi(\vec{x}) = e^{ikx_3} - \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} U(\vec{x}')\psi(\vec{x}')$$

e se approssimiamo la funzione d'onda sotto integrale con l'onda piana entrante e usiamo lo sviluppo in serie valido a distanze grandi dal diffrattore:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \approx |\vec{x}| \left[ 1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^2} \right] \equiv |\vec{x}| - \vec{e} \cdot \vec{x}'$$

$$\vec{x} \equiv \vec{e}|\vec{x}|$$

così che:

$$\psi(\vec{x}) \approx e^{ikx_3} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \int d^3x' U(\vec{x}')\psi(\vec{x}') e^{-i\vec{k}\vec{x}'} \approx e^{ikx_3} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \int d^3x' U(\vec{x}') e^{-i\vec{q}\vec{x}'}$$

$$\vec{q} = \vec{k} - k\vec{e} \quad , \quad \vec{k} \equiv (0,0,k)$$

Come si vede da questa formula, l'ampiezza di scattering-diffrazione è determinata dal momento trasferito  $q$  e non è altro che la trasformata di Fourier del potenziale.

La relazione con la diffrazione prodotta da un ostacolo rifrangente con indice di rifrazione  $n(x)$  è resa evidente all'equivalenza:

$$n^2(x) = 1 - U(x)/k^2$$