

Lagrangiane e Hamiltoniane come simulacri di sistemi reali

Carlo Bernardini

Scuola di storia della fisica 2007

AIF

carlo.bernardini@roma1.infn.it

Introduzione

Una grande fortuna della fisica consiste nella possibilità di lavorare su "sistemi isolati". Questo permette di contenere il numero delle variabili necessarie e di rappresentare il sistema con un simulacro formale (lagrangiana o hamiltoniana) portando l'attenzione su "le regole del gioco": i principi variazionali.

I simulacri vengono analizzati in modo da scoprire tutte le loro proprietà utili: simmetrie e leggi di conservazione, invarianti, ecc. È il trionfo della meccanica, che fabbrica il linguaggio per tutta la fisica, scoprendo persino leggi indipendenti dalle teorie che si susseguono (come meccanica analitica classica > meccanica relativistica > meccanica quantistica).

Mostrerò poi come la tecnica della funzione di Green permette di generare gli effetti distanti delle sorgenti, che una sua generalizzazione al caso di problemi di onde che diffondono in un mezzo non omogeneo localizzato permette di introdurre una rappresentazione grafica dei cosiddetti "propagatori" e loro rilettura mediante diagrammi di Feynman.

La nozione di fattore di forma è essenziale alla fisica microscopica e verrà fuori naturalmente nell'analisi dei problemi di diffrazione e scattering.

Il mondo sulla carta

Sì, è vero: se non si osservano le cose così come sono e non si fanno esperimenti la fisica non può nascere.

Ma non basta.

Bisogna che la fenomenologia si trasformi in rappresentazioni mentali formalizzate e quindi vada sulla carta.

Teorie e esperimenti sono indissolubili.

I simulacri (1)

I simulacri formali dei sistemi fisici sono la grande scoperta dei meccanici analitici. Ma, prima, c'è una congettura importantissima:

I sistemi isolati

Se non fossimo capaci di frammentare il mondo in sistemi che si comportano come se fossero i soli nell'universo, saremmo travolti dal numero delle variabili

Scelte arbitrarie, purché intelligenti

1 - La nozione di **grado di libertà** .

Non è una nozione banale: il g. di l. è una variabile che caratterizza lo stato dinamico di un sistema e le cui variazioni descrivono l'evoluzione del sistema stesso.

Un punto materiale costretto su un segmento ha un grado di libertà, identificabile con la sua coordinata di posizione detta anche **variabile canonica** .

Un punto nello spazio ha tre gradi di libertà (tre coordinate canoniche)

Che cosa hanno scoperto Galilei e Newton?

La grande scoperta è stata che nella descrizione dei sistemi dinamici si possono assegnare (quasi) a piacere (compatibilmente con le definizioni) le variabili canoniche e le loro velocità di variazione a un dato istante (iniziale ma qualsiasi: si vuole sapere che cosa accade di lì in poi).

La scoperta: le leggi sono equazioni differenziali del second ordine, servono due costanti di integrazione.

Lo spazio delle condizioni iniziali si chiama spazio delle fasi e ha due dimensioni per ogni grado di libertà. Dunque, per N gradi di libertà lo spazio delle fasi ha $2N$ dimensioni.

Simulacri (2)

Chiamiamo $q(t)$ una variabile canonica e $\dot{q}(t)$ la sua velocità di variazione.

Supponiamo che esista una funzione $L(q, \dot{q}, t)$ che chiameremo Lagrangiana, tale che il secondo principio della dinamica ($F=ma$) si possa ottenere partendo da L così:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Il linguaggio

Il linguaggio adottato dalla meccanica analitica diventa rapidamente il linguaggio della fisica.

Compaiono le parole impulso , energia , momento angolare , azione , e così via.

La struttura formale della teoria si consolida e il modello di riferimento dei sistemi fisici e dei fenomeni è quello del punto materiale. Esiste un embrione di teoria di campo, il campo gravitazionale.

Ma è pieno di difetti: azione a distanza, ecc.

L hamiltoniana

La lagrangiana è un derivato diretto del secondo principio della dinamica; il suo pregio principale è quello di essere un potente simulacro del sistema reale a cui si riferisce. Molti fisici preferiscono la rappresentazione introdotta da Hamilton, che in buona misura è equivalente a quella di Lagrange

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

Principi variazionali

Le equazioni di Hamilton si ottengono da un principio variazionale “analogo” a quello di Fermat. Perciò, Hamilton si convinse che la meccanica analitica si potesse estendere ai raggi luminosi in mezzi non omogenei.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = W$$

Le traiettorie dei corpi materiali sono quelle che rendono “estrema” l’azione W .

Le equazioni delle traiettorie sono quelle di Lagrange, già viste; oppure....

Equazioni di Hamilton

Nelle equazioni di Hamilton:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

all'atto pratico, $H = T + V$

I guai del terzo principio

Però, tra i principi di Newton c'è anche il terzo (detto di azione e reazione) che implica la conservazione dell'impulso. Ma è incompatibile con la relatività, nella sua forma originaria riguardante le forze.

Come si salva la conservazione dell'impulso rinunciando alle forze incompatibili con la relatività? Inventando i mediatori delle forze, che trasferiscono impulso da un punto materiale a un altro. Ma, per i mediatori in volo tra due punti (particelle interagenti):

$$\dot{q}^2 = q_0^2 - \vec{q} \times \vec{q}^1 m^2$$

$$\dot{q} = \dot{p} - \dot{p}'$$

Particelle virtuali e forze elementari

Nasce così il concetto di particelle “off mass-shell” che è il prezzo che si paga per la conservazione dell’impulso.

L’equazione per il cosiddetto 4-impulso trasferito è

$$q = p - p'$$

Tra poco vedremo che cosa ha a che fare tutto ciò con i diagrammi di Feynman.

Dal punto materiale alle onde

Un punto materiale, se ha una “proprietà” (P.es. carica elettrica) che gli fa emettere un campo di radiazione, sputa onde sferiche che si propagano fino all’infinito. L’equazione chiave è quella detta di Helmholtz:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) + k^2 f(\mathbf{x}) = d^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Dove

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

è la funzione generalizzata di Dirac in 3-d.

Onde sferiche monocromatiche

Questa equazione ha soluzioni che rappresentano onde sferiche centrate in \mathbf{x}'

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4p} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

L'eq. di Helmholtz è un caso particolare di equazione delle onde: onde monocromatiche di frequenza $kc = \omega$:

$$\nabla^2 y - \frac{\partial^2 y}{c^2 \partial t^2} = 0 \quad \textcircled{R} \quad y(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) e^{mi\omega t}$$

Onde sferiche monocromatiche uscenti

Se scegliamo il caso prodotto da sorgente puntiforme di intensità A che produce fronti d'onda sferici che si espandono al passare del tempo (Le superfici di ugual fase sono sfere) allora

$$\psi_{out}(\mathbf{r}, t) = \frac{Ae^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - i\omega t}}{4p|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

perché in questo caso le superfici di fase costante sono le sfere:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - ct = a_0$$

Onde uscenti da sorgente qualsiasi

Basta usare il principio di sovrapposizione. Se:

$$\nabla^2 y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = s(\mathbf{x}, t)$$

allora:

$$\psi_{out}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4p} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - i\omega t}}{4p |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} s(\mathbf{x}', t) \quad *$$

È un risultato straordinario, dovuto al mugnaio inglese George Green

Mezzi non omogenei

Se l'onda si propaga in un mezzo non omogeneo con indice di rifrazione $n(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 y - \frac{n^2(\mathbf{x})}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = s(\mathbf{x}, t)$$

si usa il seguente trucco:

$$\nabla^2 y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{n^2(\mathbf{x}) - 1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + s(\mathbf{x}, t) \quad **$$

Diffrazione di un'onda piana

Un'onda piana di numero d'onda k sta entrando da sinistra e si imbatte in un diffusore localizzato (l'indice di rifrazione è diverso da 1 in una piccola porzione di spazio al finito; piccolo o grande però è deciso da $1/k$, la lunghezza d'onda. Allora, l'onda che esce dal diffusore si può scrivere come la somma di un'onda entrante e di un'onda uscente.

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A e^{i(k \mathbf{x} - \omega t)} + \psi_{out}(\mathbf{x}, t)$$

Se scriviamo $\psi_{out}(\mathbf{x}, t)$ usando la funzione di Green e trattando come sorgente il primo termine a secondo membro della (**), la (*) diventa

$$* \quad \psi_{out}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - i\omega t}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} s(\mathbf{x}', t)$$

$$** \quad \nabla^2 y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{n^2(\mathbf{x}) - 1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + s(\mathbf{x}, t)$$

$$\psi_{out}(\mathbf{x}, t) = \frac{k^2}{4\pi} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - i\omega t}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (n^2(\mathbf{x}') - 1) \psi(\mathbf{x}', t)$$

dove con \mathbf{x}' indico la parte spaziale di $\psi(\mathbf{x}, t)$

Approssimazione di Born (1)

Se per $\varphi(\mathbf{x}')$

sostituisco l'onda piana entrante, ottengo la cosiddetta "approssimazione di Born" all'ordine più basso. Adesso si tratta solo di fare un po' di calcoletti intelligenti su:

$$\psi_{out}(\mathbf{x}, t) = A \frac{k^2}{4\pi p} \int d^3x' \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega t}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(n(\mathbf{x}') - 1 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'}$$

Approssimazione di Born (2)

La funzione

$$\varphi_{out}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{4\pi p} \circ G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad ***$$

si chiama “funzione di Green per onde uscenti” o anche, espressivamente, “Propagatore”. Nell’approssimazione di Born figura:

dove \mathbf{k}

$$\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{x} - \xi \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{x} - \xi \right)$$

□ il vettore di propagazione dell’onda piana incidente.

Se il diffusore □

localizzato e l’onda uscente □ osservata a grande

distanza da esso, allora $|\mathbf{k}| \gg |\mathbf{k}'|$

Approssimazione di Born (3)

Non è difficile dimostrare che

$$k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| + k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{x}'|} \gg k|\mathbf{x}| + \left(k - k \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|}\right) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{x}'|}$$

dove $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{x}|} = e_{out}^{\mathbf{r}}$ è il versore che punta dal diffusore al punto di osservazione

E perciò $k e_{out}^{\mathbf{r}} \circ \hat{k}_{out}^{\mathbf{r}}$ è il vettore d'onda verso l'osservatore;

$\hat{k} - \hat{k}_{out}^{\mathbf{r}} = \hat{q}$ è il “numero d'onda trasferito e, in definitiva, l'onda sferica uscente dal diffusore è:

$$\psi_{out}(\mathbf{x}, t) = A \frac{k^2}{4p} \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \int d^3\mathbf{x}' (n^2(\mathbf{x}') - 1) e^{i\hat{q} \cdot \mathbf{r}'} \quad \wedge$$

Come si vede, l'ampiezza dell'onda diffusa è proporzionale alla trasformata di Fourier di $(n^2 - 1)$

Scattering

Se, al posto di un'onda e,m. si prende l'eq. di Schroedinger di una particella di massa m e di momento $\hbar k$

in un potenziale $V(\vec{x})$

allora

$$(n^2 - 1) = \frac{2mV(\vec{x})}{\hbar^2 k^2}$$

Perciò, l'ampiezza dell'onda scatterata è proporzionale alla trasformata di Fourier $\hat{V}(\vec{q})$

del potenziale diffusore.

Fattori di forma

Se lo scattering è coulombiano dovuto a una carica estesa Ze di densità $\rho(x)$

e chiamiamo $F(\vec{q})$

la trasformata di Fourier di

$$\frac{\rho(\vec{x})}{Ze}$$

l'ampiezza dell'onda diffusa è proporzionale a

$$\frac{F(\vec{q})}{|\vec{q}|^2}$$

Quando $F(\vec{q}) = 1$

(carica puntiforme) si torna alla celebre formula di Rutherford:

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|^2 = 8mE \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\frac{Ze^2}{4\epsilon_0 \hbar c} \right)^2$$

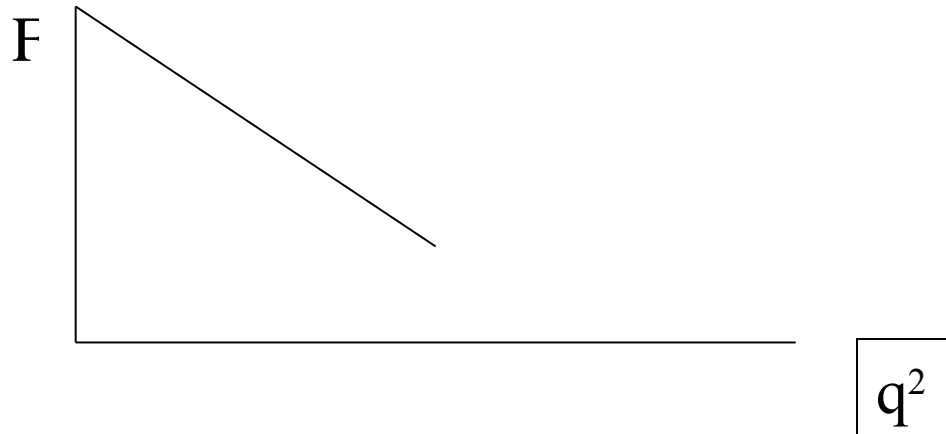
Esercizio facilissimo: mostrare la figura di diffrazione che si ottiene con una buca di potenziale sferica di raggio R .

Le dimensioni delle particelle

È con queste formule che Hofstadter ha fatto la ricostruzione sistematica del raggi nucleari.

Se si fa un diagramma
in funzione di $|q|^2$

$$F(q)$$



La *slope* iniziale
misura il raggio
quadratico medio R^2
del nucleo diffusore.

Diagrammi (1)

L'equazione integrale dello scattering (o della diffrazione) può essere risolta per approssimazioni successive

$$\varphi(\mathbf{x}) = Ae^{ik\mathbf{x}} + \frac{2m}{4p\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4p|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}) j(\mathbf{x}')$$

nel modo seguente:

$$\varphi_{j+1}(\mathbf{x}) = \frac{2m}{4p\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4p|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}) j_j(\mathbf{x}')$$

essendo

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_j j_j(\mathbf{x})$$

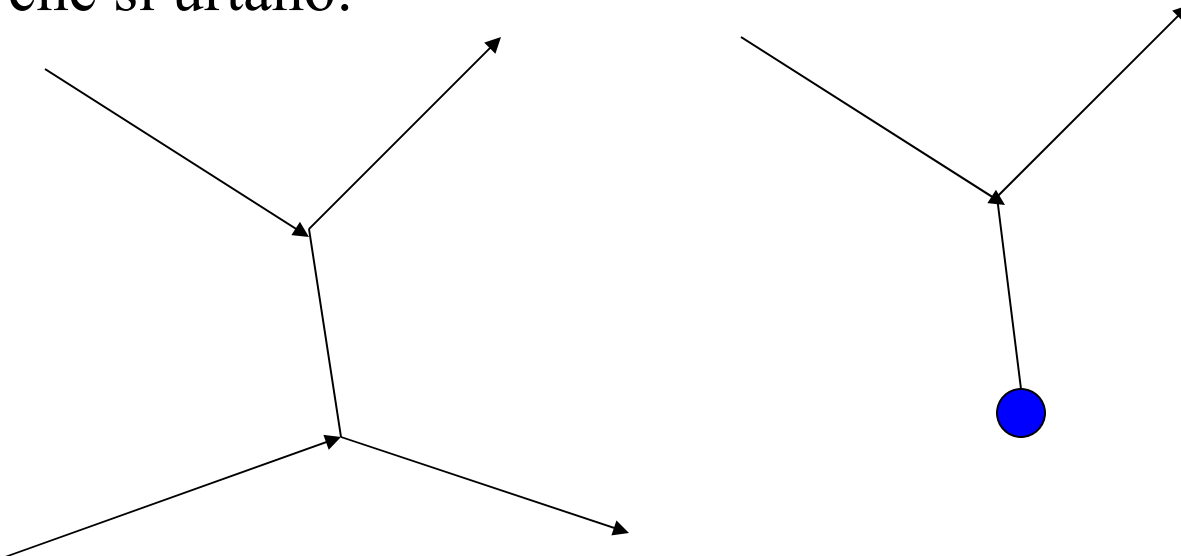
e

$$\varphi_0 = Ae^{ik\mathbf{x}}$$

Diagrammi (2)

Dick Feynmann ha escogitato una rappresentazione che corrisponde allo scambio di mediatori che trasferiscono l'impulso q

inducendo la variazione nell'impulso delle particelle libere che si urtano:



Ma si possono immaginare diagrammi con lo scambio di un numero qualsivoglia di linee intermedie

Diagrammi (3)

Lungo le linee di questi diagrammi:

- 1) Le grandezza conservate (carica elettrica, numero barionico, ecc.) si conservano rigorosamente.
- 2) Si possono generalizzare relativisticamente le proprietà di conservazione “geometriche”
- 3) Si possono rappresentare antiparticelle invertendo le frecce temporali
- 4) Si possono rappresentare contributi dovuti a loop chiusi
- 5) Si possono prescrivere regole generali di calcolo distinguendo i contributi in “vertici” e “propagatori”

Rappresentazioni mentali

La fisica dello scattering e delle interazioni fra particelle in generale acquista rappresentazioni mentali che permettono di trasferire i problemi su un computer opportunamente programmato. I “calcoli” non sono più un problema, ma la rappresentazione mediante il diagramma “one particle exchange” diventa la chiave di volta: l’iterazione è automatica. Le questioni più sottili riguardano la convergenza. La QED mostra tutto il suo splendore solo perché l’iterazione segue le potenze crescenti della costante di struttura fine

$$\alpha = \frac{1}{137}$$

che, come vedete, è piccola rispetto a 1. Non è così per le interazioni forti!