ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[1] -

Esercizio 1 (Corpo nero)

Un corpo nero è quel corpo ideale il cui coefficiente d'assorbimento *a* (ν,*T*) è massimo, cioè vale esattamente uno a tutte le frequenze e a tutte le temperature. Il suo coefficiente di emissione *e* (ν,*T*) ha anch'esso il massimo valore possibile, alla frequenza ν e alla temperatura T, perché è una funzione universale indipendente dalla struttura del materiale che emette (*e* (ν,*T*)dν≡energia emessa per unità di superficie nell'unità di tempo di radiazione e.m. nell'intervallo di frequenze[ν, ν+dν]; *a* (ν,*T*) ≡ è la percentuale della radiazione che, che alla frequenza non viene riflessa).

Kirchhoff dimostrò anche che una radiazione di corpo nero quasi perfetta è quella che esce da un forellino di un corpo in cui sia stata praticata una cavità. Nella cavità interna di un corpo tenuto a temperatura costante si stabilisce una radiazione e.m. la cui densità gode di proprietà molto semplici: isotropia, omogeneità, indipendenza dalla forma della cavità, indipendenza dalla sostanza che costituisce le pareti. *u* (ν , *T*)*d*ν è la densità di energia all'interno della cavità trasportata da onde e.m. aventi frequenza compresa fra ν e ν + *d*ν.

La conoscenza della funzione universale *u* (ν , *T*) si rivelò impresa ardua per la fisica classica, tanto è che Planck (1900) si trovò *costretto* ad introdurre una nuova costante fondamentale, *h* (la costante di Planck, appunto) per risolvere il problema.

Dedurre mediante considerazioni dimensionali la forma della funzione *u* (ν , *T*) e mostrare che il tentativo della fisica classica di trovare la formula per *u* (ν , *T*) era destinato al fallimento.

Risoluzione

Essendo *u* (ν , *T*)dν una densità di energia, si ha che le sue dimensioni risultano essere:

$$\left[u(\nu,T)d\nu\right]=\frac{E}{\ell^3}$$

con E≡Energia e ℓ ≡ lunghezza caratteristica.
Quindi le dimensioni di *u* (ν , *T*) sono:

$$\left[u\left(\nu,T\right)\right]=\frac{E\cdot t}{\ell^3} \qquad (1)$$

con t≡tempo caratteristico
Essendo *u* (ν , *T*) universale e dovendo dipendere dalla temperatura, deve certamente essere:

$$E\propto k_BT$$

con k_B ≡ costante di Boltzmann ($1.38\cdot10^{-23}$ J/K).
La lunghezza caratteristica, poiché si tratta di radiazione elettromagnetica, possiamo considerarla proporzionale alla lunghezza d'onda $\ell\propto\lambda$ e il tempo caratteristico è dato da:

$$t=\lambda/c$$

dove c ≡ velocità della luce nel vuoto ($3\cdot10^8$ m/s).
Inserendo nella (1) otteniamo:

$$u(\nu,T)\propto\frac{k_BT}{\lambda^3}\frac{\lambda}{c}=\frac{k_BT}{\lambda^2c} \qquad (2)$$

Poiché ν=c/λ , inserendola nella (2), troviamo:

[1] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

$$u(\nu,T) \propto \frac{k_B T c^2}{\lambda^2 c^3} = \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \qquad (3)$$

La (3), a parte un fattore numerico 8π, è la legge di Rayleigh-Jeans, una legge (valida a basse frequenze o a grandi lunghezze d'onda) a cui pervenivano tutti i tentativi classici realizzati .

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002;
G. Passatore: Problemi di Meccanica Quantistica elementare Franco Angeli Editore

ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[2] -

Esercizio 2 (Corpo nero)

Wien (1893), quindi prima della formula di Planck, aveva ottenuto che qualunque forma avesse avuto la funzione universale u(ν,T), che esprime la densità di energia nell'intervallo di frequenze [ν,ν+dν], essa poteva assumersi come funzione della sola variabile x=ν/T, più precisamente:

$$u(\nu,T)=\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{1}$$

La (1) è nota come Teorema di Wien e fu ottenuta combinando termodinamica ed elettromagnetismo di Maxwell.
Essa permette già di spiegare alcune proprietà sperimentali della radiazione di cavità.
Ricavare, utilizzando il Teorema di Wien, le due importanti leggi:

a) La legge empirica di Stefan (1879): la densità di energia calcolata su tutte le frequenze è proporzionale alla quarta potenza della temperatura della cavità:

$$u(T)=\frac{4}{c}\sigma T^4 \tag{2}$$

con $\sigma = 5.6703 \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)≡ costante di Stefan.

b) La legge dello spostamento: la lunghezza d'onda alla quale si trova il massimo della distribuzione spettrale è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta:

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T} \tag{3}$$

Risoluzione

a) $$u(T)=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu=\int_0^\infty T^3x^3 f(x)\,d(Tx)=T^4\int_0^\infty x^3 f(x)dx$$

con x=ν/T.

La quantità $\int_0^\infty x^3 f(x)dx$ è una costante reale resta numericamente indeterminata quando si usa il Teorema di Wien in cui la *f* (ν/ *T*) è sconosciuta. Oggi sappiamo, dopo il lavoro di Planck (1900) che:

$$\int_0^\infty x^3 f(x)dx=\frac{8\pi^5k_B^4}{15h^3c^3}=\frac{c}{4}\sigma$$

con $\sigma=\dfrac{2\pi^5k_B^4}{15h^3c^2}$ ≡ costante di Stefan (5.67×10^{-8} W/m^2 K^4) , k_B ≡ costante di Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K), h ≡ costante di Planck ($6.32 \cdot 10^{-34}$ Js), c ≡ velocità della luce nel vuoto ($3 \cdot 10^8$ m/s).

b) Ricordando che tra lunghezza d'onda λ, frequenza ν e velocità dell'onda elettromagnetica c sussiste la relazione: λν=c possiamo scrivere:

[2] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

$$u(T)=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=-\int_\infty^0 \frac{c}{\lambda^2}u(\nu,T)d\lambda=-\int_\infty^0 \frac{c}{\lambda^2}\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\lambda=\int_0^\infty \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)d\lambda$$

questo permette di affermare che la densità di energia nell'intervallo di lunghezze d'onda[λ,λ+dλ] è data da:

$$u(\lambda,T)=\frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

Volendo trovare il massimo di u(λ,T) e, quindi, dimostrare la legge dello spostamento basta annullare la derivata, rispetto a λ, di u(λ,T), cioè:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}=-5\frac{c^4}{\lambda^6} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)-\frac{c^4}{\lambda^6}\left(\frac{c}{\lambda T}\right) f'\left(\frac{c}{\lambda T}\right)=0$$

cioè:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}=5f\left(\frac{c}{\lambda T}\right)+\left(\frac{c}{\lambda T}\right) f'\left(\frac{c}{\lambda T}\right)=0$$

detto $x_0=\dfrac{c}{\lambda_{\max}T}$ il valore dell'argomento della funzione f che soddisfa l'equazione:

$$5f(x_0)+x_0 f'(x_0)=0 \tag{4}$$

questo x_0 è <u>universale</u>, nel senso che nella (4) è esplicitamente scomparsa la dipendenza da λ e da T.
Se poi *T* viene variata, anche il massimo si sposta e λ_{max} cambia, sempre però in modo che valga la (4).
cioè:

$$\lambda_{\max}=\frac{c}{x_0 T} \tag{5}$$

La legge dello spostamento del massimo della distribuzione spettrale del corpo nero risulta così spiegata.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002;

ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[3] -

Esercizio 3 (Corpo nero)

In questo esercizio non ripercorriamo esattamente la strada seguita da Planck per ottenere la sua famosa formula, perché vogliamo mettere in evidenza il suo tentativo di trovare una dimostrazione nella quale venivano congetturate nuove proprietà della materia ignote fino ad allora (1900)[4].

I concetti fondamentali su cui si basarono le considerazioni di Planck furono sostanzialmente i seguenti tre:

1) **la distribuzione canonica**: dato un gran numero di sistemi fisici interagenti che possono assumere valori continui di energia ε, se $\omega(\varepsilon)d\varepsilon$ rappresenta la frazione dei sistemi considerati aventi energia nell'intervallo $[\varepsilon, \varepsilon+d\varepsilon]$ si ha che: $\omega(\varepsilon) = Ne^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}$, con $N = \dfrac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} d\varepsilon}$ costante di normalizzazione.

2) **relazione tra radiazione–materia**: $u(\nu, T) = \dfrac{8\pi}{c^3}\nu^2 U$ con U $\equiv$energia media degli oscillatori della cavità e $u(\nu,T) \equiv$ densità di energia della radiazione nella cavità . Questa relazione esprime un preciso rapporto fisico fra la radiazione (rappresentata a sinistra da u (ν , T)) e la materia (rappresentata a destra da U) ed è naturalmente ottenuta supponendo che nelle pareti della cavità siano presenti oscillatori aventi frequenze meccaniche eguali alle frequenze della radiazione osservata, come è richiesto dalla stretta identità fra le due frequenze per un oscillatore armonico carico classico. La radiazione e.m. avente distribuzione spettrale u (ν , T) viene continuamente emessa e riassorbita dagli oscillatori armonici costituenti le pareti della cavità. Considerati tutti gli oscillatori con la stessa frequenza ν, ma dotati di diverse energie ε, la loro energia media è $\overline{\varepsilon} = U$.

3) **quantizzazione dell'energia**: l'energia degli oscillatori ε potesse avere in natura soltanto valori discreti, e precisamente valori multipli interi di un quanto energetico fondamentale ε_0:

$$\varepsilon = \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, ..., n\varepsilon_0 ...$$

a) Dimostrare che se l'energia ε degli oscillatori e supposta assumere valori continui si ottiene $\overline{\varepsilon} = U = k_B T$.

b) Dimostrare che se invece viene quantizzata l'energia degli oscillatori (secondo l'ipotesi 3) si ottiene:

$$\overline{\varepsilon} = U = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} - 1}.$$

---

[3] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

[4] Quando Planck cominciò a studiare il problema c'era una situazione straordinaria perché erano state proposte due diverse formule per u (ν , T), che ben presto però si dimostrarono entrambe errate. La prima era stata ottenuta da Wien, sulla base di un ragionamento non rigoroso, grazie ad analogie con la formula di Maxwell per la distribuzione delle velocità molecolari e la seconda era stata ottenuta da Rayleigh e contrastava nettamente con la formula empirica di Wien, ma che aveva almeno il pregio di essere stata dedotta rigorosamente dalla fisica classica. Nell'anno 1900 Kurlbaum e Rubens portarono a termine a Berlino nuove accurate misure di R (ν , T) (radianza spettrale). Furono i loro risultati a dimostrare per la prima volta che tanto la legge di radiazione di Rayleigh quanto la formula empirica di Wien non erano compatibili con le osservazioni. La fisica classica veniva dunque a trovarsi in una situazione critica da cui emergeva per la prima volta con estrema chiarezza la sua assoluta impotenza nello spiegare i dati osservativi. Planck risiedeva a Berlino e potè esaminare i risultati dei colleghi prima ancora che fossero pubblicati. Si accorse così che la formula di Rayleigh-Jeans andava bene solo per piccoli valori di ν/T, mentre accadeva l'opposto per quella di Wien che funzionava per grandi ν/T ma era in disaccordo con i dati per piccoli ν/T. Così nella mente di Planck nacque l'idea che la giusta legge dovesse essere una specie di media logica fra le due formule esistenti. Egli la ottenne utilizzando in modo nuovo la relazione termodinamica che collega l'entropia S, alla temperatura assoluta T e all'energia interna U di un sistema termodinamico (il sistema degli oscillatori armonici che costituivano le pareti della cavità e che erano in equilibrio con la radiazione elettromagnetica che loro stessi generavano nella cavità).

c) Utilizzando la relazione tra radiazione materia (secondo l'ipotesi 2) mostrare che $\varepsilon_0 = h\nu$, con h≡ costante di Planck.

Risoluzione

a) Per definizione di valor medio l'energia media di un sistema di oscillatori con energia continua, ponendo $\beta=1/k_BT$, si trova:

$$\overline{\varepsilon} = U = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta}\ln\left\{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon\right\} = -\frac{d}{d\beta}\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} = k_B T$$ [5]

Se si sostituisce tale risultato nell'equazione $u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 U$ si ottiene la legge di Rayleigh:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 k_B T$$

b) Ovviamente ora invece degli integrali compaiono le sommatorie:

$$\overline{\varepsilon} = U = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}}$$

Al denominatore abbiamo una serie geometrica la cui somma vale :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0} = \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}$$

Il numeratore è poi possibile scriverlo come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0} = \frac{d}{d\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}\right]$$

quindi:

$$\overline{\varepsilon} = U = \frac{\frac{d}{d\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta}\ln\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}\right] = -\frac{d}{d\beta}\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}\right) = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} - 1}$$

dove abbiamo posto $\beta=1/k_BT$.

c) Sostituendo nella relazione $u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 U$ Planck ottenne:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} - 1}$$

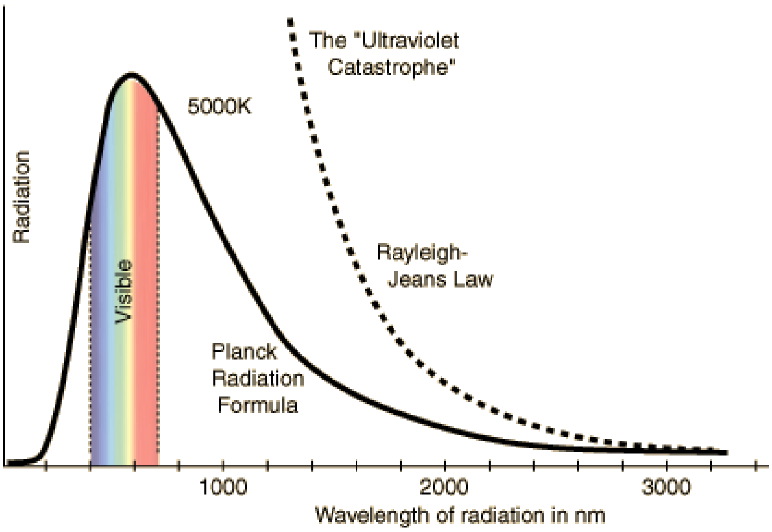
[5] Tale risultato è correlato al teorema di equipartizione dell'energia: " Sia dato un sistema in equilibrio termico a temperatura T, la cui energia dipenda in modo quadratico dalle coordinate generalizzate dello spazio delle fasi (per l'oscillatore armonico $H(q,p) = \frac{1}{2m}\left[p^2 + (m\omega)^2 q^2\right]$). Se la densità degli stati è uniforme in tale spazio, allora ad ogni grado di libertà nello spazio delle fasi compete un energia media pari a 1/2 k_BT.

Per il teorema di Wien: $u(\nu,T)=\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$, Planck dedusse che: ε_0 = hν, per cui l'espressione dela densità dell'energia della radiazione elettromagnetica in una cavità nera in equilibrio termico alla temperatura T è:

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}$$

Questa è la famosa formula di Planck per il corpo nero dove compare la frequenza della radiazione.
L'equivalente espressione della densità di energia in termini di lunghezza d'onda λ si ottiene ricordando che:

$$u(\lambda,T)=\frac{c}{\lambda^2}u(\nu,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}$$



Essa risultò in perfetto accordo con i risultati sperimentali.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002;

M.Brustolon:Corso di CHIMICA FISICA II Università di Padova http://www.chimica.unipd.it/eseg/pubblica/didattica/

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[6] -

Esercizio 4 (Corpo nero)

a) Mostrare come dalla formula di Planck: $u(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$ si ottengono la relazione di Rayleigh-Jeans e la formula di Wien.

b) Trovare il valore di h utilizzando la legge dello spostamento di Wien e la legge di Stefan.

c) Mostrare che per $h\to 0$ l'energia media degli oscillatori $\overline{\varepsilon}$ con frequenza ν, in equilibrio alla temperatura T, tende al limite classico k_BT.

Risoluzione

a) La relazione "ondulatoria" di Rayleigh-Jeans si ottiene dalla formula di Planck sviluppando in serie di potenze di $h\nu/k_BT$ il termine $e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1$ e arrestandosi al primo ordine ottenendo pertanto: $e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1\cong\frac{h\nu}{k_BT}$. .

Sostituendo nella formula di Planck si trova proprio:

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2k_BT$$

Ovviamente lo sviluppo in serie è lecito se si suppone che $h\nu/k_BT<<1$. Questa disuguaglianza viene realizzata o nel limite delle basse frequenze ($\nu\to 0$) o alle alte temperature ($T\to\infty$). In questo caso l'energia media dell'oscillatore risulta:

$$\overline{\varepsilon}=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\cong k_BT$$

La ragione profonda di questo comportamento è la seguente:
la differenza tra il livello energetico n+1e il livello n è $h\nu << k_BT$ quindi vi è abbastanza energia termica (k_BT) a disposizione per eccitare molti livelli di energia (n grande), l'insieme di questi livelli equispaziati apparirà come un continuo di energie, in accordo con la fisica classica.
Ad esempio, per T =5800K (Temperatura della fotosfera solare), l'energia termica $k_BT\cong 8\cdot 10^{-20}$J pertanto la condizione "ondulatoria classica" di Rayleigh-Jeans $h\nu<< k_BT$ si realizza per frequenze $\nu<<\frac{k_BT}{h}\cong 1.21\cdot 10^{14}s^{-1}$ (InfraRosso), quindi per frequenze, ad esempio, nella regione delle microonde. I valori tipici delle frequenze delle microonde sono $\nu_{mw}\cong 10^{11}s^{-1}$ in tal caso vi è la possibilità di eccitare al massimo un numero n di livelli di energia pari a:

$$n_{Max}=\frac{k_BT}{h\nu_{mw}}=\frac{8\cdot 10^{-20}}{6.62\cdot 10^{-34}\cdot 10^{11}}\cong 1208$$

equipaspaziati di $h\nu_{mw}\cong 6.62\cdot 10^{-23}$J.

[6] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

La formula di Wien si ottiene all'opposto per alte frequenze ($\nu\to\infty$) o alle basse temperature ($T\to 0$), pertanto per $h\nu >> k_B T$, troviamo dalla relazione di Planck:

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Questa è la formula di Wien!.
In questo caso l'energia media dell'oscillatore risulta:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}\cong h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Pertanto:

$$\lim_{\nu\to\infty}\bar{\varepsilon}=\lim_{\nu\to\infty}h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}=0$$

Quindi nel caso in cui $h\nu >> k_B T$, quasi solo lo stato ad energia zero (n = 0) è popolato, mentre gli stati con energia non nulla diventano sempre più improbabili al crescere della frequenza. La conseguenza è che a temperature ordinarie (basse $T\cong 330K$) non ci sono oscillatori con frequenze elevate, e quindi le radiazioni ad alta energia sono assenti.

b) Troviamo la legge dello spostamento di Wien derivando $u(\lambda,T)$ rispetto alla lunghezza d'onda λ:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[u(\lambda,T)\right]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}\right]=-\frac{40\pi hc}{\lambda^6}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1}+\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{\frac{hc}{\lambda k_B T}e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1\right)^2}=0$$

La derivata è stata posta uguale a 0 per trovare la lunghezza d'onda dove avviene il massimo di $u(\lambda,T)$. Semplificando troviamo:

$$5\left(e^{x_M}-1\right)=x_M e^{x_M}$$

dove $x_M=\frac{hc}{\lambda_M k_B T}$ .Risolta numericamente la precedente equazione troviamo: $x_M\cong 4.965114212..$

Consideriamo la legge di Stefan:

$$u(T)=\int_0^\infty u(\nu,T)d\nu=\int_0^\infty\frac{8\pi}{c^3}h\nu^3\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1}d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^4\int_0^\infty\frac{s^3}{e^s-1}ds=\frac{8\pi}{c^3}\frac{\pi^4}{15}\frac{(k_B T)^4}{h^3}$$

con $s= h\nu/ k_B T$, quindi: $a=\frac{4\sigma}{c}=\frac{8\pi}{c^3}\frac{\pi^4}{15}\frac{k_B^4}{h^3}$.

Nota la costante di Stefan $\sigma= 5.670373(21)\cdot 10^{-8}$ (J/s)/(m^{2}K^4), abbiamo due espressioni per trovare h:

$$\begin{cases}\dfrac{hc}{\lambda_M k_B T}=x_M\\[2ex]\dfrac{2}{c^2}\dfrac{\pi^5}{15}\dfrac{k_B^4}{h^3}=\sigma\end{cases}$$

Si noti che per conoscere il valore di h bisogna conoscere accuratamente il valore della costante di Boltzmann (la quale è collegata alla costante universale dei gas R e il numero di Avogadro $k_B = R/N_A$).

Noti i valori sperimentali di λ_M, troviamo i valori di h e k_B risolvendo il precedente sistema:

$$\begin{cases} h = \dfrac{15\sigma T^4 x_M^4 \lambda_M^4}{2\pi^5 c^2} = 6.62 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \\ k_B = \dfrac{15\sigma T^3 x_M^3 \lambda_M^3}{2\pi^5 c} = 1.38 \cdot 10^{-23}\, J/K \end{cases}$$

c) Si ha:

$$\lim_{h \to 0} \bar{\varepsilon} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \right) = k_B T$$

Ciò conferma che se h = 0 le formule quantistiche ridanno le formule classiche.

Breve Bibliografia:

R.Casalbuoni: Corpo nero - Appunti delle lezioni di MECCANICA QUANTISTICA date all' Universita' di Firenze.

M.W. Zemansky: Calore e termodinamica – Zanichelli Bologna.

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[7] -

Esercizio 5 (Corpo nero)

a) La stella Rigel (nella costellazione di Orione) emette massimamente nel blu con una massima intensità per λ = 400 nm. Calcolare la temperatura superficiale di questa stella.
b) Il raggio di Rigel è R_{Rigel} = 23 R_{Sun} (raggio del Sole). Se la temperatura della fotosfera solare è T_{Sun}= 5800K, trovare il rapporto la luminosità di Rigel e quella del Sole.
c) Come è noto, l'universo è permeato, attualmente, da una radiazione di corpo nero alla temperatura T = 2.7K. Trovare in quale regione dello spettro elettromagnetico capita il massimo dell'emissione.

Risoluzione

Le stelle, spesso, sono trattate come corpo neri, e le radiazioni elettromagnetiche emesse da questi corpi come radiazioni di corpo nero. La ragione fondamentale di ciò è la seguente: la fototosfera stellare (la regione superficiale della stella) dove viene generata la luce emessa viene schematizzata come uno strato di materiale stellare entro il quale i fotoni di luce interagiscono in modo relativamente intenso con il materiale stesso in modo da raggiungere una temperatura comune T (materia e radiazione) che viene mantenuta per un lungo periodo di tempo. Alcuni fotoni sfuggono e vengono emessi nello spazio, tuttavia l'energia che portano via è sostituita da altra energia proveniente dall'interno della stella, in modo che la temperatura della fotosfera è praticamente costante.
La fotosfera della stella si comporta, quindi, come il foro di una cavità nera in equilibrio termodinamico da cui può uscire solo una piccola quantità dell'energia interna.

a) Utilizzando la legge del massimo di Wien:

$$\lambda_M T = \frac{hc}{k_B x_M} \cong 2,89 \cdot 10^{-3} m \cdot K$$

sostituendo il valore di λ =400nm=400·10^{-9}m otteniamo che la temperatura della fotosfera di Rigel è data da:

$$T = \frac{2.89 \cdot 10^{-3}}{\lambda_M} \cong 7225K$$

b) La luminosità, L, di una stella è l'energia al secondo emessa su tutte le lunghezze d'onda in tutto l'angolo solido (4π, cioè in tutte le direzioni), nell'ipotesi che la stella sia un corpo nero e abbia simmetria sferica, risulta:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

dove: σT^4 ≡ flusso di energia emesso dall'unità di superficie (su tutte le lunghezze d'onda)
$4\pi R^2$≡ Area totale della stella supposta sferica
Quindi per Rigel: $L_{Rigel} = 4\pi R_{Rigel}^2 \sigma T_{Rigel}^4$, invece per il Sole: $L_{Sun} = 4\pi R_{Sun}^2 \sigma T_{Sun}^4$; pertanto il rapporto richiesto è:

$$\frac{L_{Rigel}}{L_{Sun}} = \left(\frac{R_{Rigel}}{R_{Sun}}\right)^2 \left(\frac{T_{Rigel}}{T_{Sun}}\right)^4 \cong 1274$$

c) Il massimo della radiazione di fondo dell'universo si ottiene applicando la legge dello spostamento di Wien:

$$\lambda = \frac{2,89 \cdot 10^{-3} m \cdot K}{T} \cong 1.07 \cdot 10^{-3} m$$

nella regione delle microonde.

[7] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002;