ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[1] -

Esercizio 11 (*Modelli atomici: da Thompson a Bohr*)

Come, giustamente afferma Franco Selleri, l'*atomismo* fece il suo vero ingresso in fisica quando furono trovate leggi matematiche che permisero la comprensione di alcune importanti proprietà atomiche. Ciò accadde quando *la teoria del moto dei pianeti* venne applicata anche al livello atomico. In entrambi i casi (moto dei pianeti, moti degli elettroni atomici) si parte dal moto di un punto materiale in un campo centrale descrivibile da una funzione potenziale:

$$U(r) = \frac{\gamma}{r}$$

e quindi dal campo di forze:

$$\vec{F}(r) = -\nabla U(r) = \frac{\gamma}{r^2}\hat{r}$$

dove:

$$\gamma := \begin{cases} -GmM \,(\text{problema gravitazionale}) \\ 2Ze^2 \,(\text{particella } \alpha \text{ nel campo di un nucleo}) \\ -Ze^2 \,(\text{elettrone nel campo del nucleo}) \end{cases}$$

con $\vec{r} = r\hat{r}$ vettore che va dal centro delle forze al punto materiale mobile.

Lo studio matematico degli effetti generati da questa forza ha permesso di risolvere i problemi relativi a situazioni fisiche molto diverse:

La spiegazione di Newton delle leggi di Keplero;

L'interpretazione di Rutherford delle deviazioni a grandi angoli delle particelle α con i nuclei pesanti (la scoperta del nucleo atomico);

La spiegazione di Bohr –Sommerfeld delle righe spettrali dell'idrogeno.

Dimostrare che, in un campo centrale, una particella di massa m:

a) Conserva il momento angolare: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ con $\vec{p} = m\vec{v}$, quantità di moto della particella.
b) La traiettoria è una conica di equazione:

$$r = -\frac{L^2}{\gamma m}\frac{1}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}$$

c) Conserva l'energia totale che risulta:

$$E = \frac{m\gamma^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

con ε eccentricità della conica.

---

[1] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

Risoluzione

a) Poiché $\vec{F}(r) = -\nabla U(r) = \frac{\gamma}{r^2}\hat{r}$ è una forza centrale si ha la conservazione del momento angolare della particella, infatti:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \quad \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

poiché $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\text{v}} \Rightarrow \vec{\text{v}} \times \vec{\text{p}} = 0$, quindi:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

cioè :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ora introducendo l’espressione di $\vec{F}(r) = \frac{\gamma}{r^2}\hat{r}$ troviamo che:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\gamma}{r^2}\hat{r} = \frac{\gamma}{r^2}\vec{r} \times \hat{r} = 0$$

Pertanto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$$

pertanto l’orbita è *in un piano* formato da $\vec{r}$ e $\vec{p}$ ed $\vec{L}$ è perpendicolare a tale piano.

b) In coordinate polari, r e θ, la posizione della particella di massa m si può scrivere:

$$\vec{r} = r\cos\vartheta\hat{x} + r sen\vartheta\hat{y}$$

per la velocità si ha subito:

$$\text{v} = \dot{\vec{r}} = \left(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\right)\hat{x} + \left(\dot{r}sen\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)\hat{y}$$

L’energia cinetica della particella è:

$$T = \frac{1}{2}m\text{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

e quindi la lagrangiana $\mathcal{L}$ di m è:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\gamma}{r}$$

Una prerogativa delle equazioni di Lagrange è quello di valere per qualunque sistema di coordinate, esse valgono, dunque, anche in coordinate polari.

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma}{r^2}$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$

La seconda delle equazioni implica che al variare nel tempo della distanza radiale r e della velocità angolare $\dot{\theta}$ si conserva il momento angolare, come già dimostrato al punto a).

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\dot{\vartheta}\hat{z}$$

Il momento angolare si conserva perché l'energia potenziale U, della particella, dipende solo da r e non da θ.

Pertanto la seconda equazione di Lagrange contribuisce solo all'energia cinetica, come se l'energia potenziale non ci fosse. Per risolvere, invece, la prima equazione di Lagrange bisogna eliminare $\dot{\theta}$, mediante il momento angolare L:

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

ed in più farla diventare lineare in r (infatti contiene r^{-2}). Questo si ottiene con il cambiamento di variabile: $u = r^{-1}$. Tuttavia è utile usare la trasformazione:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d(u^{-1})}{d\vartheta}\dot{\vartheta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\vartheta}\frac{L}{mr^2} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\vartheta}\frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2\frac{d}{d\vartheta}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}\right) = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}$$

La prima equazione di Lagrange si riscriverà allora:

$$m\left[-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2} - \frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}\right] - \gamma u^2 = 0$$

da cui si ottiene un'equazione differenziale, questa volta lineare, in u che risulta:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\gamma m}{L^2}$$

Per risolverla procediamo in due tempi.

1° risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$$

La cui soluzione è:

$$u_{Omog} = Asen\vartheta + B\cos\vartheta = Q\cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

con $Q = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\cos\vartheta_0 = \frac{A}{Q}$ e $sen\vartheta_0 = \frac{B}{Q}$.

2° Troviamo un integrale particolare dell'equazione differenziale

L'integrale particolare che cerchiamo è:

$$u_{Partic} = -\frac{\gamma m}{L^2}$$

basta sostituirlo nell'equazione e vedere che è una soluzione.

Pertanto la soluzione generale dell'equazione:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\gamma m}{L^2}$$

è data da:

$$u = u_{Omog} + u_{Partic} = -\frac{\gamma m}{L^2}\left[1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)\right]$$

dove si è posto: $Q = -\frac{\varepsilon\gamma m}{L^2}$, con $\varepsilon \geq 0$ essendo lecito cambiare segno al coseno ridefinendo θ_0 aggiungendo π .

Scrivendo la soluzione in $r = \frac{1}{u}$ otteniamo:

$$r = -\frac{L^2}{\gamma m}\frac{1}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)}$$

che rappresenta l'*equazione di una conica* in coordinate polari. Per ε vi sono 3 casi:

$$\begin{cases} \varepsilon < 1 & \text{ellisse} \\ \varepsilon = 1 & \text{parabola} \\ \varepsilon > 1 & \text{iperbole} \end{cases}$$

Si distinguono quattro casi fisicamente significativi:

1) $\gamma < 0$; $\varepsilon < 1$ (*attrazione, ellisse*). Tutti i valori di ε sono positivi e perciò fisicamente accettabili. La traiettoria è chiusa per la periodicità del coseno.
2) $\gamma < 0$; $\varepsilon = 1$ (attrazione, parabola). Tutti i valori di r sono positivi tranne quello per cui $\theta = \theta_0 + \pi$ per il quale $r = \infty$. La traiettoria è una parabola, caso limite di una ellissi con semiasse maggiore infinito.
3) $\gamma < 0$; $\varepsilon > 1$ (*attrazione, iperbole*). Poiché r deve essere positivo, sono accettabili tutti i valori per i quali $1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0) > 0$, separati dai due punti $\theta = \pm a\cos(-1/\varepsilon) + \theta_0$, per i quali $r = \infty$. La

traiettoria è un ramo d'iperbole. La particella si avvicina al centro delle forze provenendo dall'infinito per poi riallontanarsi verso l'infinito.

4) $\gamma > 0$; $\varepsilon > 1$ (*repulsione, iperbole*). Poiché r deve essere positivo, sono accettabili tutti i valori per i quali $1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)<0$, separati dai due punti $\theta = \pm a\cos(-1/\varepsilon)+\theta_0$, per i quali $r=\infty$. La particella si avvicina al centro delle forze provenendo dall'infinito raggiungendo la **distanza minima** $r_{\min} = -\frac{L^2}{\gamma m}\frac{1}{1-\varepsilon}$ ($\cos(\theta-\theta_0)=-1$)dove per poi riallontanarsi verso l'infinito. Si tratta di un urto. (Caso particella α-nucleo).

In conclusione:

Nel caso repulsivo vi sono solo traiettorie iperboliche; in quello attrattivo è possibile avere tutte e tre i tipi di coniche.

c) L'energia cinetica di m è:

$$T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right)$$

ricordando che $r = -\frac{L^2}{\gamma m}\frac{1}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}$, derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{r} = -\frac{\gamma m}{L^2}\varepsilon\sin(\theta-\theta_0)r^2\dot{\theta}$$

da cui:

$$\dot{r}^2 = \frac{\gamma^2m^2}{L^4}\varepsilon^2 sen^2(\vartheta-\vartheta_0)r^4\dot{\vartheta}^2 = \frac{\gamma^2m^2}{L^4}\varepsilon^2 sen^2(\vartheta-\vartheta_0)r^4\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{\gamma^2\varepsilon^2}{L^2}sen^2(\vartheta-\vartheta_0)$$

E' anche:

$$\frac{L^2}{m^2r^2} = \frac{\gamma^2}{L^2}\left[1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\right]^2$$

per cui l'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) = \frac{m\gamma^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2-1\right) - \frac{\gamma}{r}$$

e quindi l'energia totale della particella è data da:

$$E = \frac{m\gamma^2}{2L^2}\left(\varepsilon^2-1\right) = \text{costante}$$

e risulta:

$$\begin{cases} E<0 \Rightarrow \varepsilon<1 & \textbf{ellisse} \Rightarrow \textbf{stati legati} \\ E=0 \Rightarrow \varepsilon=1 & \textbf{parabola} \Rightarrow \textbf{stati non legati} \\ E>0 \Rightarrow \varepsilon>1 & \textbf{iperbole} \Rightarrow \textbf{stati non legati} \end{cases}$$

Breve Bibliografia:

B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[2] -

Esercizio 12 (Modelli atomici: da Thompson a Bohr)

Le particelle α (nuclei di He) emesse da un materiale radioattivo viaggiano ad altissima velocità (ad es. $2 \cdot 10^4$km/s). Quando vennero scoperte (a cavallo tra il 1800 e 1900) erano i proiettili più veloci che i fisici avessero mai avuto a disposizione.

Quando colpivano una fogliolina d'oro di spessore di 1μ= 10^{-3}mm, a volte, erano deviate anche a grandi angoli anche di 90° o 150° (esperienza di Geiger –Marsden 1911). Queste grandi deviazioni non potevano essere spiegate dal modello atomico di Thompson, formulato dopo il 1897, anno in cui era stato scoperto l'elettrone.

Il modello atomico di Thompson considerava l'atomo come una sfera di carica elettrica positiva, distribuita uniformemente, grande come l'atomo stesso, in cui erano immersi gli elettroni.

Si consideri una sfera di raggio R, uniformemente carica, provare che:

a) L'energia potenziale elettrica U della particella α è:

$$U = \begin{cases} \dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r} & \text{se } r > R \\ \dfrac{3Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R} - \dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 & \text{se } 0 < r < R \end{cases}$$

dove $2e$ è la carica elettrica della particella α e Ze la carica positiva dell'atomo.

b) Trovare la forza media su una particella α che passa da una distanza R_1>R ad una distanza R_2<R.

c) Dimostrare che se ϕ_{Max} è l'angolo di deviazione, risulta:

$$tg\phi_{Max} = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 M_\alpha R \mathrm{v}_\alpha^2}$$

dove M_α e v_α sono rispettivamente la massa e la velocità della particella α ed $\varepsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \; \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$.

Risoluzione

a) All'esterno il campo di una sfera carica si trova applicando il Teorema di Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

per r≥R si ha:

$$E_{est} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Ze}{\varepsilon_0}$$

pertanto:

[2] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

$$E_{est}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Per 0≤r≤R si ha:

$$E_{int}\cdot 4\pi r^2=\frac{\left(\frac{Ze}{4/3\pi R^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_0}$$

cioè:

$$E_{int}=\left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r$$

Pertanto il potenziale generato dalla sfera uniformemente carica si calcola:
per r≥R si ha:

$$V_{est}(r)-V_{est}(\infty)=\int_r^\infty E_{est}dr$$

Assumendo il potenziale all'infinito nullo, cioè $V_{est}(0)=0$, otteniamo:

$$V_{est}(r)=\int_r^\infty \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Per 0≤r≤R si ha:

$$V_{\text{int}}(r)=\int_r^\infty Edr=\int_R^\infty \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_r^R\left(\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)rdr$$

quindi:

$$V_{\text{int}}(r)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R}+\left(\frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\right)\left(R^2-r^2\right)=\frac{3Ze}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{Ze}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2$$

L'energia potenziale della particella α vale:
per r≥R

$$U_{est}(r)=2eV_{est}(r)=\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Per 0≤r≤R

$$U_{\text{int}}(r)=2eV_{\text{int}}(r)=\frac{3Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r^2$$

b) La forza sulla particella α è data da:

$$F(r)=2eE(r)=-\nabla U(r)=\begin{cases}+\dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r\geq R\\ +\dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 R^3}r & 0\leq r\leq R\end{cases}$$

Sia U che F sono funzioni continue in r = R.
La forza media che si esercita sulla particella α che passa dalla distanza R_1 >R esterna al nucleo, alla distanza R_2<R interna al nucleo è data da:

$$\bar{F} = \frac{1}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2} F(r)dr = \frac{1}{R_2 - R_1}\left[\int_{R_1}^{R} F_{est}(r)dr + \int_{R}^{R_2} F_{\text{int}}(r)dr\right]$$

cioè:

$$\bar{F} = \frac{1}{R_2 - R_1}\left[\int_{R_1}^{R} \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \int_{R}^{R_2} \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 R^3} rdr\right] = \frac{1}{R_2 - R_1}\left[\frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) + \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R_2^2 - R^2\right)\right]$$

dopo un po' di algebra possiamo scrivere:

$$\bar{F} = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{(R_1 - R_2)R} - \frac{1}{(R_1 - R_2)R_1} - \frac{R_2^2}{(R_1 - R_2)R^3}\right] < \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 (R_1 - R_2)R}$$

c) Ricordando la II legge del moto di Newton e il teorema dell'impulso la variazione della quantità di moto della particella α:

$$\Delta p_\alpha = \bar{F}\Delta t \cong \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 (R_1 - R_2)R} \cdot \frac{R_1 - R_2}{\mathrm{v}_\alpha} = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 R \mathrm{v}_\alpha}$$

dove $\mathrm{v}_\alpha \cong 2 \cdot 10^4 \, km/s = 2 \cdot 10^7 \, m/s$ è la velocità della particella α.

L'angolo ϕ_{Max} l'angolo di deviazione massimo è dato da:

$$tg\phi_{Max} \cong \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 R M_\alpha \mathrm{v}_\alpha^2}$$

Nell'esperimento si aveva:

$\mathrm{v}_\alpha \cong 2 \cdot 10^7 \, m/s$; $Z = 79$; $M_\alpha \cong 6.63 \cdot 10^{-27} \, kg$; $R \cong 1.4 \cdot 10^{-8} \, cm$; $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \, C.$

Pertanto inserendo i dati troviamo:

$$\phi_{\max} \cong 1.5 \cdot 10^{-4} \, rad \cong 0.01°$$

La sfera di elettricità positiva *non è* dunque in grado di produrre grandi deviazioni angolari!

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002

ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B.Buonaura : ISIS “ALBERTINI” –NOLA (NA) & GSF-AIF[3] -

Esercizio 13 (Modelli atomici: da Thompson a Bohr)

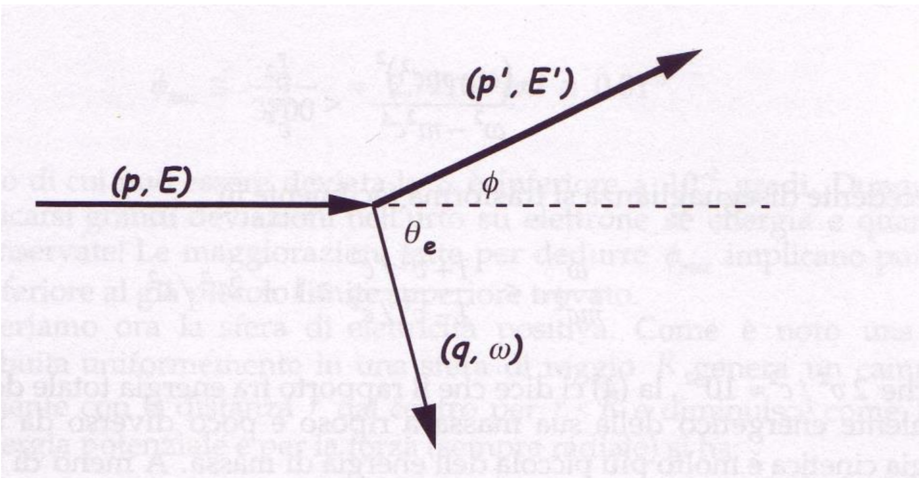
La particella α, durante il viaggio all’interno dell’atomo “modello Thompson” *<u>può urtare un elettrone</u>*.
Utilizzando le legge relativistiche di conservazione dell’impulso e dell’energia provare che l’angolo massimo di deviazione delle particelle α, dopo l’urto con l’elettrone è:

$$\varphi_{Max} \cong \frac{2m_e}{M_\alpha - 2m_e} \approx 0.01°$$

dove $M_\alpha = 6.63 \cdot 10^{-27}$kg (massa della particella α); $m_e = 9.11 \cdot 10^{-23}$kg (massa dell’elettrone).

Risoluzione

L’elettrone sia inizialmente in quiete nel Sistema di Riferimento del laboratorio ($\mathbf{v}_{termica} + \mathbf{v}_{orbitale} = 0$).



Le leggi di conservazione relativistiche dell’energia e della quantità di moto danno:

$$\begin{cases} E + m_e c^2 = E' + \omega \\ p = p'\cos\phi + q\cos\vartheta_e \\ 0 = p' sen\phi - q sen\vartheta_e \end{cases}$$

dove (p, E) impulso ed energia iniziale della particella α; (p’, E’) impulso ed energia della particella α dopo l’urto; (q, ω) impulso ed energia dell’elettrone dopo l’urto.
Dalle due ultime equazioni troviamo:

$$p'\cos\phi = p - q\cos\theta_e; \quad p'\sin\phi = q\sin\theta_e$$

Elevando al quadrato entrambe:

$$p'^2\cos^2\phi = p^2 - 2pq\cos\theta_e + q^2\cos^2\vartheta_e; \quad p'^2\sin^2\phi = q^2\sin^2\theta_e$$

Sommando membro a membro e, dopo, moltiplicando per c^2:

$$p'^2 c^2 = p^2c^2 + q^2c^2 - 2c^2 pq\cos\theta_e$$

Ricavando E’ dalla prima equazione:

$$E' = E + m_e c^2 - \omega$$

---

[3] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l’Insegnamento della Fisica.

elevando al quadrato entrambi i membri:

$$E'^2 = E^2 + m_e{}^2c^4 + \omega^2 + 2Em_ec^2 - 2E\omega - 2\omega m_ec^2$$

e sottraendo membro a membro questa equazione con la precedente ottenuta dalla conservazione della quantità di moto, troviamo:

$$E'^2 - p'^2c^2 = E^2 - p^2c^2 + m_e{}^2c^4 + \omega^2 - q^2c^2 + 2Em_ec^2 - 2E\omega - 2\omega m_ec^2 + 2pqc^2\cos\vartheta_e$$

Semplifichiamo tale espressione utilizzando gli invarianti relativistici:

$$E'^2 - p'^2c^2 = M_\alpha^2c^4;\ E^2 - p^2c^2 = M_\alpha^2c^4;\ \omega^2 - q^2c^2 = m_e^2c^4$$

otteniamo:

$$c^2pq\cos\theta_e = \left(\omega - m_ec^2\right)\left(E + m_ec^2\right)$$

Questa si può scrivere anche:

$$\frac{pc}{E + m_ec^2}\cos\theta_e = \frac{\omega - m_ec^2}{qc}$$

quindi sicuramente risulta:

$$\frac{\omega - m_ec^2}{qc} \le \frac{pc}{E + m_ec^2} < \frac{pc}{E}$$

Ricordando anche che da:

$$E = \frac{M_\alpha c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_\alpha^2}{c^2}}};\ p = \frac{M_\alpha \mathrm{v}_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}_\alpha^2}{c^2}}}$$

si ottiene:

$$pc/E = \mathrm{v}_\alpha / c$$

dove v_α è la velocità della particella α prima dell'urto.
Sostituendo nella disuguaglianza ottenuta troviamo:

$$\frac{\omega - m_ec^2}{qc} \le \frac{pc}{E + m_ec^2} < \frac{\mathrm{v}_\alpha}{c}$$

quindi utilizzando l'invariante relativistico dell'elettrone $\omega^2 - q^2c^2 = m_e^2c^4$ troviamo:

$$\frac{\left(\omega - m_ec^2\right)^2}{\omega^2 - m_e^2c^4} < \frac{\mathrm{v}_\alpha^2}{c^2}$$

cioè:

$$\frac{\omega - m_ec^2}{\omega + m_ec^2} < \frac{\mathrm{v}_\alpha^2}{c^2}$$

Risolvendo in ω la disequazione, ricordando che il suo denominatore è sempre positivo, si ottiene:

$$\frac{\omega}{m_ec^2} < \frac{1 + \mathrm{v}_\alpha^2/c^2}{1 - \mathrm{v}_\alpha^2/c^2} \cong 1 + 2\mathrm{v}_\alpha^2/c^2$$

perché $2\mathrm{v}^2/c^2 \cong 10^{-2}$, pertanto l'energia cinetica dell'elettrone è più piccola della sua energia di massa.
Allora può scriversi anche:

$$\omega \cong m_ec^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m_e v_e^2}$$

dove v_e è la velocità dell'elettrone dopo l'urto, quindi:

$$\frac{\omega}{m_e c^2} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}_\mathrm{e}^2}{\mathrm{c}^2} < 2\frac{\mathrm{v}_\alpha^2}{\mathrm{c}^2} \Rightarrow \mathrm{v}_e < 2\mathrm{v}_\alpha$$

Dal sistema iniziale di equazioni si ottiene anche:

$$tg\phi = \frac{p'\sin\phi}{p'\cos\phi} = \frac{q\sin\theta_e}{p - q\cos\theta_e} < \frac{q}{p-q}$$

quindi essendo $\mathrm{v}_e < 2\mathrm{v}_\alpha$ si può scrivere:

$$tg\phi < \frac{m_e \mathrm{v}_\mathrm{e}}{M_\alpha \mathrm{v}_\alpha \text{-} m_e \mathrm{v}_\mathrm{e}} < \frac{2m_e \mathrm{v}_\alpha}{M_\alpha \mathrm{v}_\alpha \text{-} 2m_e \mathrm{v}_\alpha} = \frac{2m_e}{M_\alpha \text{-} 2m_e} \cong \frac{1}{3700}$$

quindi:

$$tg\phi \cong \phi_{\max} \cong \frac{1}{3700} = 2.7 \cdot 10^{-4} rad \cong 0.01°$$

Dunque l’angolo per il quale la particella α può essere deviata nel suo percorso, nell’atomo, “modello Thompson”, urtando un elettrone è molto piccolo; dunque, nemmeno l’urto α-*e* provoca le deviazioni osservate a grandi angoli delle α.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002

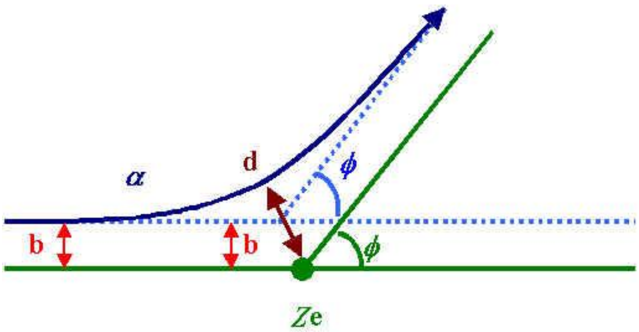
B.Buonaura : ISIS "ALBERTINI" –NOLA (NA) & GSF-AIF[4] -

Esercizio 14 (*Modelli atomici: da Thompson a Bohr*)

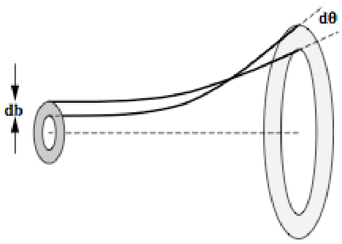
Gli esercizi precedenti mostrano (Esercizio 12 ed Esercizio 13) mostrano che il modello atomico di Thompson non è in grado di "spiegare" la deviazioni a grandi angoli delle particelle incidenti su una lamina metallica d'oro di spessore 10^{-4} cm, contenente 10^4 atomi nella direzione di attraversamento.

a) Considerando il risultato ottenuto nell'Esercizio 12 $tg\phi_{Max} \cong \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 RM_\alpha v_\alpha^2}$, che dà la deviazione massima subita dalle particelle α da parte della sfera di elettricità positiva, mostrare cosa indusse Rutherford a proporre il "modello planetario" di atomo: nucleo di carica positiva centrale ed elettroni ruotanti "simili a pianeti".

b) Un nucleo d'oro è molto più pesante di una particella α. Si assumerà, pertanto, che il nucleo sia in quiete durante l'urto.



Sia b la distanza tra la direzione della particella α incidente ed una retta parallela passante per il nucleo fermo; tale distanza viene chiamata *parametro d'urto*. Sulla particella α agisce il potenziale coulombiano $\frac{Ze}{r}$ repulsivo. L'elemento di superficie bersaglio che corrisponde ad un angolo di diffusione tra ϕ e ϕ +dϕ è definito dall'area della corona circolare compresa tra i parametri d'urto b e b+db è chiamata *sezione d'urto differenziale* dσ.



Nella figura dθ=dϕ

Poiché $d\sigma=2\pi b db$ mostrare che risulta:

$$d\sigma = 2\pi\left[\frac{Ze^2}{M_\alpha v_\alpha^2}\right]^2 \frac{sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

detta sezione d'urto di Rutherford.

[4] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

Risoluzione

a) Nell'espressione $tg\phi_{Max} \cong \dfrac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 R M_\alpha \mathrm{v}_\alpha^2}$ tutti parametri sono noti (in particolare Z =79 (oro)). L'unico parametro, non fissato, dipendente dal modello teorico è R, il raggio della sfera di carica positiva. Affinché ϕ_{max} sia dell'ordine di grandezza osservato (150° = (5/6)π ^{rad}) deve essere:

$$R \cong \frac{Ze^2}{\pi\varepsilon_0 M_\alpha \left|tg\phi_{Max}\right| \mathrm{v}_\alpha^2}$$

sostituendo i valori:

$$\mathrm{v}_\alpha \cong 2\cdot 10^7\, m/s \quad ;\ Z = 79\ ;\ M_\alpha \cong 6.63\cdot 10^{-27}\, kg \ \ ; \ \left| tg\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right| = 0.5773;\ \ e = 1.6\cdot 10^{-19}\, C;$$

$$\varepsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12}\, F/m$$

si ottiene:

$$R=3.8\cdot 10^{-27}\mathrm{cm}$$

ben più piccolo del raggio atomico di ~10^{-10}cm allora stimato. Queste considerazioni indussero Rutherford ad assumere che gli elettroni fossero attratti da un nucleo di carica positiva di dimensioni molto piccole e, pertanto, fossero in equilibrio dinamico con il nucleo, come i pianeti con il Sole.

b) Sulla particella α agisce il potenziale coulombiano $\dfrac{Ze}{r}$ (in unità gaussiane) che è *centrale*. In un campo centrale sono *conservati* il *momento angolare* e l'*energia meccanica*. Consideriamo le posizioni asintotiche della particella α prima dell'urto (-∞) e dopo l'urto (+∞) con il nucleo atomico:

$$\begin{cases} M_\alpha \mathrm{v}_{\alpha(-\infty)} d\sin\vartheta_{-\infty} = M_\alpha \mathrm{v}_{\alpha(+\infty)} d\sin\vartheta_{+\infty} \\ \dfrac{1}{2}M_\alpha \mathrm{v}^2{}_{\alpha(-\infty)} + U_{-\infty} = \dfrac{1}{2}M_\alpha \mathrm{v}^2{}_{\alpha(+\infty)} + U_{+\infty} \end{cases}$$

essendo $U(r) = \dfrac{2Ze^2}{r}$ risulta che $\lim\limits_{r\to\pm\infty} \dfrac{2Ze^2}{r} = 0$ per cui:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_{\alpha(-\infty)} = \mathrm{v}_{\alpha(+\infty)} \\ b = d\sin\vartheta_{-\infty} = d\sin\vartheta_{+\infty} \end{cases}$$

Ora consideriamo l'equazione del moto dell'esercizio 3-11:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\gamma M_\alpha}{L^2}$$

con u =1/r (distanza $^{-1}$ della particella α dal nucleo) ; $\gamma = 2Ze^2$; L= $M_\alpha \mathrm{v} b$ con b=$r\sin\theta$. Sostituendo troviamo che:

$$\frac{\gamma M_\alpha}{L^2} = \frac{2Ze^2 M_\alpha}{M_\alpha^2 \mathrm{v}^2 b^2} = \frac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2 b^2} = \frac{D}{b^2}$$

con $D = \dfrac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2}$ e quindi l'equazione del moto assume la forma:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{D}{b^2}$$

Il suo integrale generale è:

$$u = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta - \frac{D}{b^2}$$

dove A e B sono costanti che vengono determinate dalle seguenti condizioni iniziali:

I. θ→0 deve essere compatibile con u→0 (cioè r→∞) pertanto:

$$A - \frac{D}{b^2} = 0$$

II. θ→0 deve essere compatibile con $\dot{r} \rightarrow -\mathrm{v}$ (poiché r decresce e $\dot{r} < 0$, fase di avvicinamento al nucleo) quindi:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{d(1/u)}{d\vartheta}\frac{L}{M_\alpha r^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\vartheta}\frac{L}{M_\alpha}u^2 = -\frac{L}{M_\alpha}\frac{du}{d\vartheta}$$

sostituendo al posto di L : L= M_αvb e al posto di du/dθ: $\frac{du}{d\vartheta} = -A\sin\vartheta + B\cos\vartheta$ otteniamo:

$$\dot{r} = -\mathrm{v}b(-A\sin\vartheta + B\cos\vartheta)$$

Per θ =0 deve aversi allora:

$$-\mathrm{v} = -\mathrm{v}bB \Rightarrow B = \frac{1}{b}$$

Quindi:

$$\frac{1}{r} = \frac{D}{b^2}\cos\vartheta + \frac{1}{b}\sin\vartheta - \frac{D}{b^2} = \frac{D}{b^2}\left(\cos\vartheta - 1\right) + \frac{1}{b}\sin\vartheta$$

Ora se ricordiamo l'esercizio 11possiamo scrivere la soluzione del moto ottenuta nella forma:

$$r = -\frac{L^2}{\gamma M_\alpha}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\left(\theta - \theta_0\right)}$$

$$\frac{\gamma M_\alpha}{L^2} = \frac{D}{b^2}; Q = -\sqrt{A^2 + B^2} = -\sqrt{\frac{D^2}{b^4} + \frac{1}{b^2}} = -\frac{1}{b^2}\sqrt{D^2 + b^2}$$

$$\cos\vartheta_0 = \frac{A}{Q} = \frac{D}{b^2}\cdot\left(-\frac{b^2}{\sqrt{D^2 + b^2}}\right) = -\frac{D}{\sqrt{D^2 + b^2}}$$

con:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{B}{Q} = \frac{1}{b}\cdot\left(-\frac{b^2}{\sqrt{D^2 + b^2}}\right) = -\frac{b}{\sqrt{D^2 + b^2}}$$

$$\varepsilon = -\frac{QL^2}{\gamma M_\alpha} = \left(-\frac{\sqrt{D^2 + b^2}}{b^2}\right)\left(-\frac{b^2}{D}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{D}\right)^2} > 1$$

cioè la traiettoria della particella α è un'iperbole se b≠0 (Se b =0 si ha un urto centrale).

L'angolo θ', con cui emerge la particella α emerge dopo l'urto, si può trovare come segue:

per r→∞:

$$0 = \frac{D}{b^2}\left(\cos\vartheta' - 1\right) + \frac{1}{b}\sin\vartheta'$$

Questa equazione ha 2 soluzioni:

θ' = 0 prima dell'urto

e la seconda dopo l'urto data da:

$$\frac{b}{D} = \frac{1-\cos\vartheta'}{sen\vartheta'} = tg\left(\frac{\vartheta'}{2}\right)$$

Poiché θ’ + ϕ = π ⇒ θ’ = π - ϕ risulta:

$$tg\left(\frac{\vartheta'}{2}\right) = ctg\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

e quindi:

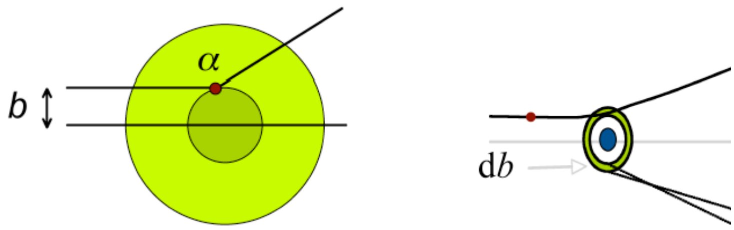
$$ctg\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{b}{D}$$

Differenziamo la relazione trovata e otteniamo:

$$\frac{db}{D} = -\frac{d\phi}{2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Questa relazione *permette di ricondurre il problema di sapere quante particelle* α *sono diffuse tra* ϕ e ϕ + dϕ *al problema di determinare quante hanno parametro d’urto fra* b e b + db.
Si definisce *sezione d’urto differenziale* l’area della corona circolare compresa tra i parametri d’urto b e b+db:

$$d\sigma = 2\pi b db$$



Sia h lo spessore della lamina sulla quale incidono le particelle α. Sia a l’area sulla quale le α vanno a cadere realmente. Se n è il numero di nuclei per unità di volume, il numero totale d nuclei N_t è $N_t = n\,a$ h.
La probabilità che una particella α abbia parametro d’urto compreso tra b e b+db :

$$P(b)db = \frac{\text{Area complessiva di tutte le corone circolari circondanti ogni nucleo}}{\text{Area totale su cui incidono concretamente le } \alpha} = \frac{N_t d\sigma}{a}$$

cioè:

$$P(b)db = 2\pi nhbdb$$

Quindi la probabilità che la particella α possa essere deviata fra ϕ e ϕ + dϕ risulta:

$$P(\phi)d\phi = -P(b)db = -2\pi nhD\,ctg\left(\frac{\phi}{2}\right)\left[-\frac{Dd\phi}{2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}\right] = \frac{\pi}{2}nhD^2\frac{\sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)}d\phi$$

ricordando che $D = \dfrac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2}$ si ottiene definitivamente:

$$P(\phi)d\phi = \frac{\pi}{2}nh\left[\frac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2}\right]^2\frac{\sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)}d\phi$$

e quindi la sezione d'urto differenziale dσ dipende solo dal nucleo in esame (e non dalle variabili macroscopiche n e h) è data da:

$$d\sigma = 2\pi \left[\frac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2} \right]^2 \frac{\sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)} d\phi$$

Essa è chiamata la *sezione d'urto di Rutherford*. E' stata verificata sperimentalmente molte volte con proiettili diversi (particelle α, protoni, elettroni,…) ed è stata trovata corretta dando fiducia nella reale *presenza di un nucleo* al centro di un atomo, ma anche nella validità delle solite leggi elettromagnetiche al suo interno.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002

B.Buonaura : ISIS “ALBERTINI” –NOLA (NA) & GSF-AIF[5] -

Esercizio 15 (Modelli atomici: da Thompson a Bohr)

L'esperimento di Rutherford (anche detto esperimento di Geiger e Marsden) fu un esperimento effettuato per sondare la struttura dell'atomo eseguito da Hans Wilhelm Geiger e Ernest Marsden nel 1909 sotto la direzione di Ernest Rutherford al laboratorio di fisica dell'Università di Manchester. Tuttavia questo esperimento e la scoperta del modello atomico nucleare che ne seguì, resero drammaticamente chiara l’impossibilità della fisica del 1910 di spiegare le proprietà degli atomi, anzi, cosa assai ancor più grave, la loro stessa stabilità.
Infatti, il modello planetario di atomo proposto da Rutherford (atomo costituito da una parte centrale, il nucleo, e da elettroni ruotanti attorno al nucleo) presenta due seri problemi:

- la stabilità
- la radiazione che viene emessa presenta uno spettro continuo di frequenze e non uno spettro di righe come viene sperimentalmente osservato.

E’ noto che, dall’elettromagnetismo di Maxwell, una carica accelerata (ad es. un elettrone) perde energia emettendo radiazione elettromagnetica. Questa perdita di energia, nell’unità di tempo, è data dalla relazione:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}a^2$$

con $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$C; c = $3 \cdot 10^{-8}$ m/s; $a \equiv$ accelerazione dell’elettrone (o della carica considerata).

Si consideri ora l’atomo di idrogeno, H, esso è costituito secondo il modello Rutherford da un protone di carica + e e da un elettrone di carica – e. Consideriamo le orbite circolari dell’elettrone attorno al protone (supposto fermo poiché la sua massa $m_p \cong 2000\ m_e$; $m_e = 1.9 \cdot 10^{-31}$kg). Determinare il tempo di collasso τ_c dell’elettrone sul nucleo (protone) supponendo che il raggio atomico medio sia $r_0 = 0.5 \cdot 10^{-10}$m.

Risoluzione

L’energia totale E dell’elettrone dovuta all’intersezione coulombiana del nucleo è:

$$E = \frac{1}{2}m_e \mathrm{v}_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

La velocità dell’elettrone sull’orbita circolare è data dell’equazione del moto di Newton:

$$\frac{m_e \mathrm{v}_e^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

da cui:

$$\frac{1}{2}m_e \mathrm{v}_e^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

[5] Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l’Insegnamento della Fisica.

per cui l'energia totale meccanica dell'elettrone si scrive:

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} < 0$$

L'accelerazione (centripeta) dell'elettrone è data da:

$$a = \frac{\mathrm{v}_e^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e r^2}$$

Sostituendo nell'espressione che dà la perdita di energia dE/dt troviamo:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^3 m_e^2 c^3}\frac{1}{r^4}$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione dell'energia meccanica dell'elettrone otteniamo:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt}$$

Uguagliando le due espressioni troviamo:

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^3 m_e^2 c^3}\frac{1}{r^4}$$

da cui semplificando:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 m_e^2 c^3}\frac{1}{r^2}$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale a variabili separabili, cioè :

$$r^2 dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 m_e^2 c^3} dt$$

Integrando *r* tra r_0 e 0 e t tra 0 e τ_c otteniamo:

$$\int_{r_0}^{0} r^2 dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 m_e^2 c^3}\int_0^{\tau_c} dt$$

quindi:

$$\tau_c = \frac{1}{4}\frac{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 m_e^2 c^3}{e^4} r_0^3$$

Inserendo i valori otteniamo per l'atomo di H: $\tau_c = 1.3 \cdot 10^{-11}$s .

Gli atomi non dovrebbero esistere e noi con loro! La frequenza dell'elettrone (orbitando attorno al nucleo) è:

$$\omega_e = \frac{\mathrm{v}}{r} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}} \propto r^{-3/2}$$

Pertanto se $r \to 0 \Rightarrow \omega_e \to \infty$, dunque la frequenza della radiazione emessa è *continua* e *diverge*.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002