

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF

## Esercizio 21 ( Condizioni di quantizzazione, invarianti adiabatici )

La condizione di quantizzazione del momento angolare congetturata da Bohr per spiegare lo spettro di emissione (assorbimento) dell'H, è un altro indizio che in fisica esistono grandezze che possono prendere soltanto valori che sono numeri interi e che per questo sono dette *grandezze fisiche quantizzabili*.

Il grande successo del modello Bohr per l'atomo di H pose tre grandi questioni concettuali negli anni successivi:

- Trovare un procedimento generale di quantizzazione.
- Completare la teoria di Bohr per l'atomo di H ottenendo predizioni anche per l'intensità delle righe e per la loro polarizzazione ed infine ottenere una spiegazione delle *regole di selezione* ( non tutti possibili passaggi fra stati stazionari venivano osservati).
- Comprendere la ragione fisica della validità dei postulati di Bohr.

Già Planck, al congresso Solvay del 1911, mostrò che l'ipotesi di quantizzazione dell'energia degli oscillatori armonici, in equilibrio dinamico con la radiazione, è compatibile con il moto meccanico di un oscillatore armonico classico.

- Partendo dall'equazione del moto classico dell'oscillatore armonico mostrare che l'energia totale è costante e si scrive come:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \text{costante}$$

con  $p = m\dot{q}$ .

- Mostrare che nello spazio delle fasi (q,p) la precedente equazione dell'energia si esprime come l'equazione di

una ellisse di semiassi  $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ ;  $b = \sqrt{2mE}$ .

- Mostrare che l'area dell'ellisse è soggetta alla quantizzazione:

$$J = \oint pdq = nh ; n \in \mathbb{N}$$

## Risoluzione

- L'equazione del moto dell'oscillatore armonico di massa  $m$ , soggetto alla forza conservativa  $F = -kq$  (la forza elastica di richiamo) si scrive applicando la seconda legge di Newton:

$$m\ddot{q} = -kq$$

cioè:

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0$$

ponendo  $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$  troviamo l'equazione differenziale lineare (non vi sono potenze di  $q$  né delle sue derivate

con esponente  $>1$ ) del 2° ordine ( compare soltanto la derivata seconda di  $q$  rispetto al tempo) omogenea (il secondo membro è nullo):

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Per sostituzione banale si prova che 2 soluzioni indipendenti ( integrali) sono:  $\sin(\omega t)$ ;  $\cos(\omega t)$ .

Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale è una combinazione lineare degli integrali indipendenti:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

con A e B costanti arbitrarie che si determinano dalle *condizioni iniziali* ( $q(t=0) = q_0$ ;  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ ).

La soluzione generale può essere scritta in modo equivalente come:

$$q(t) = Q \sin(\omega t + \phi)$$

ponendo  $A = Q \sin \phi$  e  $B = Q \cos \phi$ .  $\phi$  è detta fase dell'oscillazione.

Ora risulta anche:

$$p(t) = m \dot{q}(t) = m \omega Q \cos(\omega t + \phi)$$

Pertanto l'energia meccanica totale E è data da:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 Q^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k Q^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m \omega^2 Q^2$$

dove abbiamo fatto uso della definizione  $\omega^2$ . Pertanto abbiamo provato che E è una *costante del moto*.

- 2) Riprendiamo l'equazione della conservazione dell'energia scrivendola in un modo alternativo:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \Rightarrow \frac{q^2}{\frac{2E}{k}} + \frac{p^2}{2mE} = 1$$

Ponendo:  $a^2 = \frac{2E}{k}$ ;  $b^2 = 2mE$

otteniamo:

$$\frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

cioè l'equazione di una ellisse con semiassi  $a$  e  $b$  nel piano delle fasi  $(q,p)$ .

- 3) Nel piano delle fasi  $(q,p)$ , l'area dell'ellisse si trova:

$$J = \oint p dq$$

dove l'ellisse è parametrizzata nella forma trigonometrica:  $q = a \cos \vartheta$ ;  $p = b \sin \vartheta$  e quindi (percorrendo la curva in senso orario):

$$J = \int_{2\pi}^0 -ab \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} E$$

Ricordando che la frequenza dell'oscillatore è:

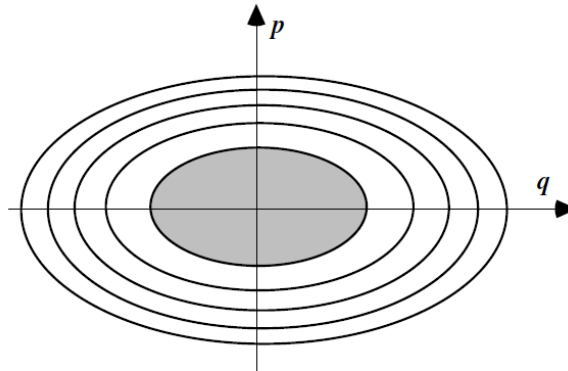
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sostituendo nell'espressione di J, otteniamo:

$$J = \frac{E}{\nu}$$

Sia E che  $\nu$  sono delle costanti, infatti, assegnato il rapporto  $k/m$  vibrazioni ampie o vibrazioni strette avvengono esattamente con la stessa frequenza e, per una data ampiezza di oscillazione, E è costante.

In fisica classica  $a$  e  $b$  variano con continuità, nel senso che tutte le soluzioni di dell'equazione del moto con  $v$  data da  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  e con  $E$  arbitrario sono accettabili: è fisso solo il rapporto  $b/a (= m k)$ . Quindi sono possibili movimenti che differiscono in  $Q$  (e quindi in  $E$ ) di arbitrariamente poco. allora anche due "traiettorie" nel piano delle fasi possono differire di quantità arbitrariamente piccole. Cioè queste "traiettorie", alcune delle quali sono rappresentate nella figura sottostante, riempiono con continuità il piano  $(p, q)$ .



Alcune traiettorie nel piano delle fasi del punto rappresentativo dell'oscillatore armonico.

Se si impone la condizione di quantizzazione di Planck sull'energia dell'oscillatore :

$$E = nh\nu$$

la situazione cambia drasticamente perché:

$$a = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2h\nu}{k}} ; b = \sqrt{n} \sqrt{2mh\nu} ; J = nh ; n \in \mathbb{N}$$

Dell'infinità continua di "traiettorie" classiche solo alcune restano permesse (ne resta un'infinità discreta). A quelle permesse la meccanica classica si applica senza restrizioni.

Si noti che il valore di  $J$  fissa automaticamente anche quelli di  $a$ ,  $b$ ,  $E$ , dato che tutte queste grandezze dipendono dallo stesso intero  $n$ .

Questa formula anticipò di diversi anni la regola di quantizzazione di Sommerfeld; il ragionamento precedente può essere visto come un'applicazione del *principio di corrispondenza*. Il rapporto di discontinuità/continuità con la fisica classica è qui il seguente: dichiarare impossibile la stragrande maggioranza dei movimenti classici e conservare in fisica dei quanti solo quei movimenti che soddisfano:

$$J = nh ; n \in \mathbb{N}$$

Una differenza fra la quantizzazione di Bohr dell'atomo di H e la quantizzazione di Planck dell'oscillatore armonico è la seguente: *per l'oscillatore armonico le traiettorie fisiche possibili avvengono sullo stesso segmento di retta e sono quindi sovrapposte (non lo sono invece le traiettorie "fittizie" nello spazio delle fasi  $(q,p)$ ), mentre nel caso delle orbite circolari di Bohr dell'elettrone sono spazialmente separate, dato che sono cerchi concentrici (con il centro nel nucleo dell'atomo) con raggio proporzionale al quadrato di un numero intero.*

#### Breve Bibliografia:

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF

## Esercizio 22 ( Condizioni di quantizzazione, invarianti adiabatici )

Fino al 1916 gli studi fatti sul problema della compatibilità fra la meccanica classica e le condizioni di quantizzazione esaminavano soltanto sistemi atomici imperturbati. Nel 1916 P. Eherenfest propose la seguente estensione delle condizioni di quantizzazione per i sistemi meccanici, estensione che prese il nome di *Metodo degli invarianti adiabatici*.

Si consideri il moto di una particella di massa  $m$  in una regione il cui potenziale è  $V(r, \alpha)$  dove  $\alpha$  è un parametro che *si può far variare*, o almeno, *si può pensare di poter far variare*. Ad es.: particella in un campo elettrico esterno variabile; un pendolo la cui corda viene accorciata cambiando in tal modo il potenziale gravitazionale cui il pendolo è soggetto; una particella soggetta ad un potenziale coulombiano di un nucleo la cui carica elettrica viene supposta variabile; ecc.

Se si varia *molto lentamente* il parametro  $\alpha$  in  $V(r, \alpha)$ , si ottiene *per ogni nuovo valore* di  $\alpha$  un nuovo problema fisico che può essere trattato allo *stesso modo*: *meccanica classica + leggi di quantizzazione*.

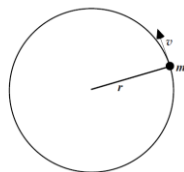
Consideriamo un sistema con un moto periodico. La traiettoria nello spazio delle fasi  $p(q)$ , soluzione delle equazioni del moto è una *curva chiusa*. Consideriamo ora che il sistema sia soggetto al potenziale  $V(r, \alpha)$ , con  $\alpha$  che varia molto lentamente con il tempo  $t$  (*variazione adiabatica*), la traiettoria  $p(q, \alpha(t))$  non sarà più periodica, tuttavia a causa della lenta variazione di  $\alpha$  la traiettoria *per molti periodi* sarà una *curva approssimativamente chiusa*. Eherenfest, utilizzando i metodi della meccanica analitica<sup>1</sup>, concluse che la quantità:

$$J(\alpha) = \int_0^T p(\alpha, t) dq(\alpha, t) = \oint pdq$$

è un invariante, cioè non dipende dal tempo e quindi da  $\alpha$ . Alla quantità  $J(\alpha)$  si dà il nome di *invariante adiabatico*.

Pertanto Eherenfest concluse che si *dovevano quantizzare*, ponendoli uguale ad  $nh$  (con  $n \in \mathbb{N}$ ), proprio le quantità  $J(\alpha)$ . Dopo il processo di quantizzazione *sopravvivono* solo alcune delle *infinite traiettorie* (nello spazio delle fasi) e a queste *traiettorie selezionate* la meccanica classica *si applica senza restrizione*.

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  vincolato da un filo a muoversi di moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio  $r$ . Sia  $v$  le velocità del punto materiale. Si pensi di aumentare *molto lentamente*, mediante il filo, il raggio  $r$ , quindi  $r = \alpha$ .



Dimostrare che:

- a) Il lavoro  $d\mathcal{L}$  fatto dal punto materiale sul filo che avanza di  $dr$  è:  $dW = \frac{mv^2}{r} dr$ .
- b) La variazione di energia cinetica  $dT$  della massa  $m$  è:  $dT = -dW$
- c) Il momento angolare  $L = mvr = \text{costante}$
- d) Se  $p = mr^2 \dot{\mathcal{G}}$  ;  $q = \mathcal{G}$  allora:  $J = \oint pdq = nh$

<sup>1</sup> Lev D. Landau- Evgenij M. Lifits – *Fisica Teorica 1 – Meccanica*- Editori Riuniti - Edizioni Mir 1994

## Risoluzione

- a) La massa  $m$  ha un'accelerazione centripeta:  $v^2/r$ . La tensione del filo è perciò:  $\mathcal{F} = \frac{mv^2}{r}$ . Per il 3° principio della dinamica deve esserci una forza uguale ed opposta  $\mathcal{F}' = -\mathcal{F}$  esercitata da  $m$  sul filo. E' questa la forza che fa allungare il filo non appena sia lasciato un po' scorrere, pertanto il lavoro fatto da  $m$  sul filo è che avanza di  $dr$  è:

$$dW = \mathcal{F}' dr = \frac{mv^2}{r} dr$$

- b) La variazione di energia cinetica della massa  $m$  è allora uguale:

$$dT = -dW \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{mv^2}{r} dr$$

cioè:

$$mvdv = -\frac{mv^2}{r} dr$$

- c) Ne segue che:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r}$$

Integrando opportunamente:

$$\int_v^{v+\Delta v} \frac{dv}{v} = -\int_r^{r+\Delta r} \frac{dr}{r}$$

otteniamo:

$$\log(v+\Delta v) - \log v = \log r - \log(r + \Delta r) \Rightarrow \log(v+\Delta v) + \log(r + \Delta r) = \log v + \log r$$

cioè:

$$\log[(v+\Delta v)(r + \Delta r)] = \log(vr)$$

quest'ultima uguaglianza implica:

$$\log(vr) = \text{costante} \Rightarrow vr = \text{costante}$$

Se si moltiplica per la massa  $m$  si ottiene che Bohr quantizza, nell'atomo di H, il momento angolare  $L$  dell'elettrone,  $L = mvr$  (invariante adiabatico) perché questa quantità fisica rimane costante per una lenta variazione di  $r$ . Si vede che il metodo di Bohr concorda pienamente con il metodo di Ehrenfest.

- d) Nel moto circolare le variabili lagrangiane sono  $r$  e  $\theta$ . Nel moto circolare uniforme si ha:

$$\dot{r} = 0; \dot{\theta} = \omega = \text{costante}$$

La lagrangiana  $\mathcal{L}$  in questo caso è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - mV = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mV = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mV$$

dove  $V$  è il potenziale costante (che può essere posto anche uguale a zero)

Il momento coniugato di  $q = \theta$  è:  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}$ . Quindi:

$$J = \oint pdq = \int_0^{2\pi} mr^2 \dot{\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} mr^2 \omega d\theta = 2\pi mrv = nh$$

cioè:

$$mvr = n\hbar$$

che è la quantizzazione di Bohr del momento angolare.

#### Breve Bibliografia:

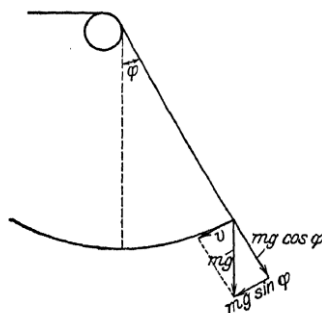
F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002

## ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF

### Esercizio 23 ( Condizioni di quantizzazione, invarianti adiabatici )

Come ulteriore applicazione delle idee di Eherenfest si consideri un pendolo semplice la cui lunghezza può essere variata tirando il filo, sopra una puleggia, lentamente.



Se accorciamo il filo lentamente, in modo che la lunghezza del filo viene variata lentamente da  $\ell$  a  $\ell + \Delta\ell$  (con  $\Delta\ell < 0$ ):

- Trovare il lavoro compiuto  $W$  per accorciare il filo.
- Trovare il lavoro compiuto  $W$  nel caso di piccole oscillazioni ( $\phi \ll 1^{\text{rad}}$ ).
- Dimostrare che se  $q = \ell\phi$  e  $p = m\dot{q}$  allora:

$$J = \oint p dq = \frac{E}{\nu} = \text{costante}$$

dove:

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} mg \ell \phi^2$$

è l'energia meccanica del pendolo (per piccole oscillazioni).

### Risoluzione

- Il lavoro infinitesimo per accorciare il filo è fatto contro la tensione del filo:

$$-T d\ell = -\left(m \frac{v^2}{\ell} + mg \cos \phi\right) d\ell$$

con:

$$\frac{mv^2}{\ell} \text{ (forza centripeta) ; } -mg \ell \cos \phi \text{ (componente radiale forza di gravità)}$$

pertanto il lavoro totale  $W$  fatto per accorciare il filo di un tratto  $\Delta\ell$  è dato da:

$$W = - \int_{\ell}^{\ell+\Delta\ell} \left(m \frac{v^2}{\ell} + mg \cos \phi\right) d\ell$$

Si noti che la velocità  $v$  del pendolo è:  $v = \sqrt{\dot{\ell}^2 + (\ell\dot{\phi})^2}$ ; poiché supponiamo che la variazione di  $\ell$  nel tempo è molto lenta ( $\ell$  è il parametro  $\alpha$  di Eherenfest), possiamo trascurare il termine radiale  $\dot{\ell}^2$  ottenendo:

$$v \cong \ell \dot{\phi}$$

D'altra parte se scriviamo la lagrangiana del pendolo come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - U_{grav} = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2) + mg\ell \cos\phi$$

Applicando l'equazione di Lagrange alla coordinata  $\ell$ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\ell}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\ell} = 0$$

si ottiene:

$$m\ddot{\ell} = m\frac{v^2 - \dot{\ell}^2}{\ell} + mg \cos\phi$$

Il 2° membro, se trascuriamo il termine radiale  $\dot{\ell}^2$ , è proprio la tensione radiale del filo  $\mathfrak{T}$  contro la quale si compie il lavoro  $W$  per poter accorciare il filo. Pertanto, in prima approssimazione, possiamo dire che il lento accorciamento del filo in direzione radiale è dovuto proprio alla variazione della tensione  $\mathfrak{T}$  alla quale il filo è soggetto.

La seconda equazione lagrangiana del moto è:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0$$

che permette di ottenere:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell} \sin\phi - 2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell}$$

Non è lecito questa volta trascurare il termine con  $\dot{\ell}$  al secondo membro, perché variazione lenta non significa  $d\ell/dt \cong 0$ . Precedentemente abbiamo posto  $\dot{\ell}^2 \cong 0$ .

E' la presenza del termine gravitazionale  $mg\cos\phi$  che rende non semplice sia il calcolo di  $W$  che la risoluzione delle equazioni di Lagrange, pertanto dobbiamo ricorrere a qualche approssimazione.

- b) Nel caso di piccole oscillazioni,  $\phi \ll 1^{\text{rad}}$ :

$$\cos\phi \cong 1 - \frac{1}{2}\phi^2 ; \sin\phi \cong \phi$$

L'ipotesi di piccole oscillazioni permette di scrivere la seconda equazione di Lagrange come:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{\ell}\phi - 2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell}$$

Se vogliamo usare le note soluzioni  $\phi = \phi_0 \cos\omega t$  ;  $\dot{\phi} = -\omega\phi_0 \sin\omega t$  con  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  e provare a

calcolare  $W$  dobbiamo poter trascurare il termine:  $2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell}$ .

Proviamo, a tal uopo, a stimare  $\dot{\ell}$ . Se l'accorciamento del filo è adiabatico (estremamente lento) ciò vuol dire

che il pendolo compie molte oscillazioni complete di periodo  $\Pi = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  a lunghezza  $\ell$  costante. Pertanto



se  $n$  è il numero di queste oscillazioni, una stima di  $\dot{\ell}$  è la seguente:  $\dot{\ell} \cong \frac{\ell}{n\Pi}$ . Una stima di  $\dot{\phi}$  è invece:

$$\dot{\phi} \cong \frac{\phi}{\Pi}. \text{ Pertanto: } 2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell} \cong 2\frac{\frac{\ell}{n\Pi}\frac{\phi}{\Pi}}{\ell} = 2\frac{\phi}{n\Pi^2}. \text{ Quindi affinché } 2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell} \text{ sia trascurabile deve essere:}$$

$$2\frac{\dot{\ell}\dot{\phi}}{\ell} \ll \frac{g}{\ell}\phi$$

cioè:

$$2\frac{\phi}{n\Pi^2} \ll \frac{g}{\ell}\phi \Rightarrow \frac{2}{n\Pi^2} \ll \frac{4\pi^2}{\Pi^2}$$

che comporta un numero  $n$  di oscillazioni che soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$n \gg \frac{1}{2\pi^2} \cong 0.05$$

Pertanto l'accorciamento del filo è adiabatico se dopo almeno una sola oscillazione  $\dot{\ell} \cong \frac{\ell}{\Pi}$ .

Ora possiamo usare per il calcolo di  $W$  le ipotesi di adiabaticità e di piccole oscillazioni ottenendo:

$$W = - \int_{\ell}^{\ell+\Delta\ell} \left[ m\ell\dot{\phi}^2 + mg \left( 1 - \frac{1}{2}\phi^2 \right) \right] d\ell$$

Per calcolare l'integrale valutiamo  $\dot{\phi}^2$  e  $\phi^2$  con i loro valori medi su un periodo, cioè:

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} (\phi_0 \cos \omega t)^2 dt = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\frac{\omega}{2}} (\phi_0 \cos \omega t)^2 dt = \frac{1}{2}\phi_0^2$$

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} (-\omega\phi_0 \sin \omega t)^2 dt = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\frac{\omega}{2}} (-\omega\phi_0 \sin \omega t)^2 dt = \frac{1}{2}\omega^2\phi_0^2$$

finalmente il lavoro  $W$  è dato da:

$$W = -mg\Delta\ell + \frac{1}{4}mg\phi_0^2\Delta\ell - \frac{1}{2}m\ell\omega^2\phi_0^2\Delta\ell$$

essendo  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , sostituendo otteniamo:

$$W = -mg\Delta\ell - \frac{1}{4}mg\phi_0^2\Delta\ell$$

$W$  è quindi composto da due termini:

$\Delta E_{grav0} = -mg\Delta\ell$  lavoro compiuto contro la gravità per accorciare il filo dalla posizione di equilibrio;

$\Delta E = -\frac{1}{4}mg\phi_0^2\Delta\ell$  lavoro compiuto per l'incremento del moto pendolare.

Quindi:

$$W = \Delta E_{grav0} + \Delta E$$

Il termine più importante di  $W$  è il 2°. Esso rappresenta l'incremento dell'energia meccanica del moto del pendolo imperturbato quando la lunghezza del filo è accorciata di  $\Delta\ell$ .

L'energia meccanica ( per piccole oscillazioni ad  $l = \text{costante}$ ) del pendolo imperturbato è:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U_{grav} = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 - mgl \cos \phi = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mgl\phi^2 - mgl = \frac{1}{2}mgl\phi_0^2 - mgl$$

A parte il termine  $mgl$ , che rappresenta il livello zero dell'energia potenziale all'equilibrio, l'energia meccanica del pendolo durante le piccole oscillazioni è:

$$E = \frac{1}{2}mgl\phi_0^2$$

Quindi troviamo l'importante risultato che:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{-\frac{1}{4}mgl\phi_0^2\Delta l}{\frac{1}{2}mgl\phi_0^2} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}$$

Ricordando che  $\omega^2 = \frac{g}{l}$  risulta che per una variazione  $\Delta l$  del filo si ha una variazione  $\Delta\omega$  pari a:

$$2\omega\Delta\omega = -\frac{g}{l^2}\Delta l$$

cioè:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}$$

Per cui si ottiene:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

dove  $\nu = \omega/2\pi$  la frequenza di oscillazione del pendolo. Quest'ultima equazione è un'equazione differenziale, a variabili separabili, la cui soluzione è:

$$\ln E - \ln E_0 = \ln \nu - \ln \nu_0$$

cioè:

$$\ln\left(\frac{E}{\nu}\right) = \text{costante}$$

Ovvero:

$$J = \frac{E}{\nu} = \text{costante}$$

In definitiva, durante il lento accorciamento del filo la quantità  $J$  rimane costante, quindi secondo Ehrenfest possiamo quantizzarla:

$$J = nh; n \in \mathbb{N}$$

ottenendo così i livelli energetici dell'oscillatore armonico:

$$E = nh\nu$$

- c) Il metodo precedente per ottenere gli invarianti adiabatici del sistema per poi procedere alla quantizzazione è estremamente pesante. Utilizziamo pertanto:

$$J = \oint pdq$$

con:

$$p = m\dot{q} = m\dot{\phi} = -m\ell\omega\phi_0 \sin(\omega t); q = \ell\phi_0 \cos(\omega t)$$

allora:

$$J = \oint p dq = \int_0^{\pi} m \ell^2 \omega^2 \phi_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} m \ell^2 \omega^2 \phi_0^2 \sin^2(\omega t) dt = \pi m \ell^2 \phi_0^2 \omega$$

ricordando che  $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$  e che  $E = \frac{1}{2} m g \ell \phi_0^2$  si ha che effettivamente:

$$J = \frac{E}{\nu}$$

con  $\omega = 2\pi\nu$ .

J corrisponde all'area dell'ellisse nel piano delle fasi  $(q, p)$ , infatti essendo E l'energia meccanica del pendolo:

$$E = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m g \ell \phi^2 = \frac{1}{2} m g \ell \phi_0^2$$

può scriversi:

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \frac{1}{2} m g \ell \phi_0^2$$

questa equazione può trasformarsi nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{p^2}{m^2 g \ell \phi_0^2} + \frac{q^2}{\ell^2 \phi_0^2} = 1$$

i cui semiassi sono:

$$a = \ell \phi_0 ; b = m \phi_0 \sqrt{g \ell}$$

Nell'esercizio 21 abbiamo già visto che  $J = \pi ab$  l'area dell'ellisse che ora risulta:

$$J = \pi m \phi_0^2 \ell \sqrt{g \ell} = \pi m \phi_0^2 \ell^2 \frac{\sqrt{g \ell}}{\ell} = \pi m \phi_0^2 \ell^2 \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \pi m \phi_0^2 \ell^2 \omega$$

come precedentemente avevamo trovato.

#### Breve Bibliografia:

M.Born: FISICA ATOMICA, Boringhieri, 1976

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF

## Esercizio 24 ( Condizioni di quantizzazione, invarianti adiabatici )

Nel 1915 Sommerfeld fece un grosso passo avanti sulla quantizzazione. In quello stesso anno c'erano state ricerche di Wilson ed Ishiwara, che avevano trovato indipendentemente le stesse regole di quantizzazione. Il merito di A. Sommerfeld fu di badare al pratico: egli seppe *non solo trovare* le regole di quantizzazione generali, ma anche applicarle alle *orbite ellittiche dell'idrogeno*, cioè a quei movimenti che secondo la fisica classica erano *più generali* delle orbite circolari di Bohr. Il problema della quantizzazione è di rendere discrete grandezze (azione, momento angolare) che nella fisica classica possono variare con continuità, mantenendo nel contempo valida la meccanica classica per i movimenti selezionati. Le due richieste sono compatibili solo se le grandezze quantizzate *sono costanti*, cioè *se non variano* mentre il sistema procede nella sua evoluzione "permessa", come pensava Eherenfest.

L'atomo di H può essere trattato come un sistema avente 2 gradi di libertà e utilizzando le coordinate polari:  $q_1 = r$ ;  $q_2 = \theta$ . Applicando le regole di quantizzazione di Sommerfeld (che altro non sono che gli invarianti adiabatici di Eherenfest):

$$\begin{cases} \oint p_1 dq_1 = n_1 h ; n_1 \in \mathbb{N} \\ \oint p_2 dq_2 = n_2 h ; n_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Trovare che i semiasse maggiore dell'orbita ellittica è:  $a = \frac{\hbar^2}{m_e Z e^2} n^2$ ;  $n = n_1 + n_2$ , ove  $m_e$  è la massa dell'elettrone e  $Z$  il numero atomico, nel caso dell'idrogeno H,  $Z = 1$ .
- 2) Trovare che l'energia dell'elettrone è:  $E = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$ ;  $n = n_1 + n_2$
- 3) Trovare che il semiasse minore dell'ellisse è:  $b = \frac{n_2}{n} a$ ;  $n = n_1 + n_2$

In tutte le formule si è usato il sistema CGS.

## Risoluzione

- 1) L'energia cinetica  $T$  dell'elettrone, in coordinate polari, è:

$$T = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

Inoltre i momenti coniugati corrispondenti alle coordinate  $q_1 = r$ ;  $q_2 = \theta$  sono rispettivamente:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m_e \dot{r} ; p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m_e r^2 \dot{\theta}$$

Essendo il moto dell'elettrone, sotto l'influenza del potenziale coulombiano  $\frac{Ze}{r}$ , ellittico, le coordinate lagrangiane  $r$  e  $\theta$  sono funzioni periodiche del tempo. La seconda delle condizioni di quantizzazione porge:

$$\oint p_2 dq_2 = \int_0^{2\pi} m_e r^2 \dot{\vartheta} d\vartheta = 2\pi m_e r^2 \dot{\vartheta} = 2\pi L = n_2 h ; n_2 \in \mathbb{N}$$

dove  $L = m_e r^2 \dot{\vartheta}$  è il momento angolare costante dell'elettrone perché esso si muove sotto l'azione di un potenziale centrale (Esercizio 11). Pertanto:

$$L = n_2 \hbar$$

con  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , ossia la già nota quantizzazione di Bohr del momento angolare, che risulta così estesa alla

teoria più generale degli stati legati, e perciò stesso alle orbite ellittiche.

Per eseguire l'integrale della prima delle condizioni di quantizzazione, dobbiamo fare uso della dell'equazione della traiettoria (Esercizio 11):

$$r = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

con  $0 < \varepsilon < 1$  se la traiettoria una ellisse con  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2LE}{m_e Z^2 e^4}}$ , con E energia totale dell'elettrone.

Pertanto:

$$\begin{aligned} \oint p_1 dq_1 &= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} m_e \dot{r} dr = \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} m_e \frac{dr}{d\vartheta} \dot{\vartheta} \frac{dr}{d\vartheta} d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} m_e \dot{\vartheta} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} \frac{m_e r^2 \dot{\vartheta}}{r^2} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 d\vartheta = \\ &= \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} \frac{L}{r^2} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 d\vartheta = L \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{dr}{d\vartheta} \right)^2 d\vartheta \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di  $r$  della traiettoria nell'integrale si ottiene:

$$\oint p_1 dq_1 = L \int_{\vartheta_0}^{2\pi+\vartheta_0} \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\vartheta - \vartheta_0)}{[1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2} d\vartheta$$

cambiando variabile da  $\vartheta \rightarrow \theta = \vartheta - \vartheta_0$  otteniamo:

$$\oint p_1 dq_1 = L \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{[1 + \varepsilon \cos \theta]^2} d\theta$$

l'integrale  $\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{[1 + \varepsilon \cos \theta]^2} d\theta$  si risolve nel seguente modo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta}{[1 + \varepsilon \cos \theta]^2} d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta d(\varepsilon \cos \theta)}{[1 + \varepsilon \cos \theta]^2} = \int_0^{2\pi} \varepsilon \sin \theta d \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right]$$

integrando per parti:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon \sin \theta d \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right] = \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta$$

L'integrando è una funzione pari di  $\theta$  perché  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ , pertanto può scriversi:

$$- \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = -2 \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta$$

Utilizziamo ora le formule parametriche per il coseno otteniamo:

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}; t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \theta = 2 \operatorname{arctan}(t); d\theta = \frac{2}{1+t^2} dt; 1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{1+t^2 + \varepsilon(1-t^2)}{1+t^2}$$

pertanto l'integrale è ricondotto ad un integrale di una funzione razionale:

$$-2 \int_0^\pi \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} d\theta = -2 \int_0^{+\infty} \frac{-2\varepsilon t^2 + 2\varepsilon}{(1+t^2)[(1-\varepsilon)t^2 + 1 + \varepsilon]} dt = 2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right]$$

dove si è adoperato il metodo della scomposizione in frazioni della funzione integrale del tipo:

$$\frac{-2\varepsilon t^2 + 2\varepsilon}{(1+t^2)[(1-\varepsilon)t^2 + 1 + \varepsilon]} = \frac{At + B}{1+t^2} + \frac{Ct + D}{(1-\varepsilon)t^2 + 1 + \varepsilon}$$

che porge i valori:

$$A = 0; B = 2; C = 0; D = -2$$

Pertanto:

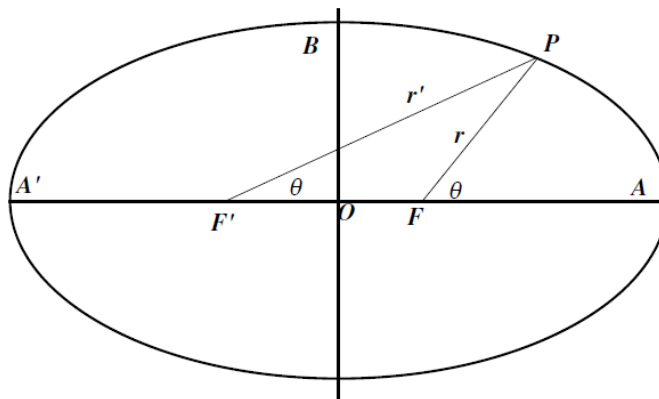
$$\oint p_1 dq_1 = L 2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right] = n_1 h$$

Ricordando che  $L = n_2 \hbar$  si ottiene sostituendo nella relazione precedente:

$$\frac{L}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = n \hbar$$

con  $n = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

Consideriamo l'ellisse nella figura sottostante:



$$\overline{OA} = a \text{ (semiasse magg.)}; \overline{OB} = b \text{ (semiasse min.)}; \overline{OF} = f \text{ (dist. focale)}; \varepsilon = \frac{f}{a} \text{ (eccentricità)}$$

per la definizione stessa di ellisse: "luogo geometrico dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti  $F$  ed  $F'$  detti fuochi", si può scrivere:  $r + r' = \text{costante} = FA + F'A = F'A' + FA' = AA' = 2a$  per la simmetria dei punti dell'ellisse.

Ora essendo:

$$r = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

si ha:

$$r_1 = FA = r(\theta = 0) = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 + \varepsilon}; r_2 = FA' = r(\theta = \pi) = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

per cui si trova finalmente il risultato richiesto:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{L}{m_e Z e^2 (1 - \varepsilon^2)}$$

da cui usando la seconda condizione di quantizzazione  $\frac{L}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = n\hbar$ , troviamo:

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e Z e^2} n^2$$

che è esattamente la regola di quantizzazione di Bohr per le orbite circolari, qui estesa ai semiassi maggiori delle orbite ellittiche.

2) Ricordando che l'energia cinetica si scrive:

$$T = \frac{1}{2} m_e (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m_e \left( \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m_e^2 r^2} \right)$$

dall'equazione dell'orbita troviamo che:

$$\dot{r}^2 = \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{L^2} \varepsilon^2 \sin^2 \theta ; \quad \frac{L^2}{m_e^2 r^2} = \frac{Z^2 e^4}{L^2} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2$$

per cui l'energia cinetica diventa:

$$T = \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) + \frac{Z e^2}{r}$$

con  $r = \frac{L^2}{Z e^2 m_e} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ .

Ne segue che l'energia totale E dell'elettrone è data da:

$$E = T + U = \frac{m_e^2 Z^2 e^4}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1)$$

da cui usando la seconda condizione di quantizzazione  $\frac{L}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = n\hbar$  troviamo:

$$E = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$$

che coincide esattamente con il risultato di Bohr per le orbite di *assegnato* semiasse maggiore  $a$  e semiasse minore  $b$  qualsiasi.

3) Per calcolare il semiasse minore  $b$  facciamo uso della definizione dell'eccentricità  $\varepsilon$  dell'ellisse:

$$\varepsilon = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

quindi:

$$b = \frac{n_2}{n} a$$

Dunque in tutti i casi è  $b < a$  perché  $n_2 \leq n$ .

Possiamo concludere che:

- Fissato il semiasse maggiore  $a$  è fissata l'energia totale E dell'elettrone. Ammettendo, come nella teoria di Bohr, che le transizioni fra i livelli energetici avvengono con l'emissione di radiazione di frequenza uguale

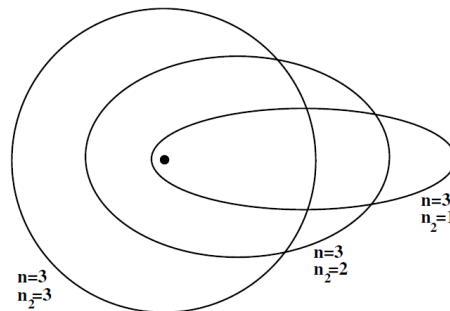
alla differenza di energia dei livelli divisa per la costante di Planck, è spiegata la formula di Balmer anche per le orbite ellittiche.

- Le  $n$  orbite ellittiche, aventi  $n$  fissato, e quindi il semiasse maggior  $a$  fissato, hanno tutte la stessa energia  $E_n$  anche se  $b$  è diverso da orbita ad orbita: vi è *degenerazione*.
- Escluso  $n = 0$  ( che darebbe  $L = 0$ , quindi il vettore quantità di moto parallelo al vettore posizione, portando ad urto frontale l'elettrone con il nucleo), si ha che vi sono le seguenti possibilità :

$n = 1$	;	$n_2 = 1$	cerchio
$n = 2$	;	$n_2 = 2$	cerchio
$n = 2$	;	$n_2 = 1$	ellisse
$n = 3$	;	$n_2 = 3$	cerchio
$n = 3$	;	$n_2 = 2$	ellisse
$n = 3$	;	$n_2 = 1$	ellisse

eccetera.

Nella figura sottostante sono rappresentate tutte le orbite ellittiche corrispondenti ad  $n = 3$ .



#### Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002



## ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF

### Esercizio 25 ( Condizioni di quantizzazione, invarianti adiabatici )

Un altro risultato interessante ottenuto da Sommerfeld, fu la *sparizione della degenerazione* energetica per ogni  $n$ , quando si considerano i piccoli effetti relativistici sul moto dell'elettrone. Si crea una situazione in cui vi sono in realtà  $n$  livelli energetici, separati di pochissimo, al posto di uno solo. Utilizzando la correzione relativistica della massa

dell'elettrone con la velocità:  $m_e(\mathbf{v}) = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , mostrare che la correzione relativistica all'energia totale  $E$

dell'elettrone risulta:

$$E = - \left( m_e + \frac{\langle T \rangle}{c^2} \right) \frac{Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

dove  $\langle T \rangle$  è il valore medio dell'energia cinetica calcolato sull'intera orbita e che risulta:

$$\langle T \rangle = E + \frac{Z^2 e^2}{2a\varepsilon} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

motivando la *rimozione* della degenerazione dei livelli energetici.

In tutte le formule si è usato il sistema CGS.

### Risoluzione

Consideriamo la massa relativistica dell'elettrone:

$$m_e(\mathbf{v}) = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nell'Esercizio 17 si è stimato che il rapporto  $v/c \cong 7.33 \times 10^{-3}$  per l'elettrone nell'atomo di H, pertanto sviluppando al 2° ordine in  $v/c$  si ottiene:

$$m_e(\mathbf{v}) = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong m_e \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

quindi:

$$m_e(v) \cong m_e \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{T}{c^2} \right)$$

Un valore ragionevole di  $m_e(v)$  si ottiene stimando il valore medio di T sull'intera orbita ellittica.

Per far ciò inseriamo l'espressione ottenuta per  $m_e(v)$  nell'espressione ottenuta per l'energia totale E dell'elettrone nell'Esercizio 24:

$$E = - \frac{m_e \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\langle T \rangle}{c^2} \right) Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2}$$

Ora il calcolo del valor medio di T procede nel modo seguente:

$$\langle T \rangle = \langle E - U \rangle = E - \langle U \rangle = E - \left\langle -\frac{Ze^2}{r} \right\rangle = E + \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Ze^2}{r} dr = E + \frac{Ze^2}{r_2 - r_1} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

con:  $r_1 = FA = r(\theta = 0) = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 + \varepsilon}$  ;  $r_2 = FA' = r(\theta = \pi) = \frac{L^2}{Ze^2 m_e} \frac{1}{1 - \varepsilon}$  (come visto nell'Esercizio 24).

Pertanto sostituendo otteniamo che il valor medio di T è dato da:

$$\langle T \rangle = E + \frac{Ze^2}{r_2 - r_1} \ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

$$\text{con } \varepsilon = \sqrt{1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2} = \sqrt{1 - \left( \frac{n_2}{n} \right)^2}.$$

Pertanto il valor medio di T dipende sia dal semiasse maggiore  $a(n)$ , sia da  $\varepsilon(n_2, n)$  e quindi è diverso da orbita ad orbita.

La funzione  $\ln \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$  è una funzione crescente di  $\varepsilon$  nell'intervallo  $[0, 1[$ , pertanto poiché  $\varepsilon$  decresce all'aumentare di  $b$  (cioè di  $n_2$ ), il valor medio di T diminuisce all'aumentare di  $b$  (cioè di  $n_2$ ). Pertanto il valore di E aumenta con  $n_2$  a parità di  $n$  e la *degenerazione* è sparita.

Tuttavia, l'accordo sperimentale non è molto buono, e la spiegazione delle "righe di struttura fina" verrà data in seguito dalla Meccanica Quantistica Relativistica di Dirac. Comunque, utilizzando il modello Sommerfeld, Schwarzschild ed Epstein riuscirono con successo a spiegare quantisticamente l'effetto Stark – Lo Surdo (riga atomica che si scinde in diversi componenti in un campo elettrico). Dunque possiamo dire che la teoria di Bohr-Sommerfeld, in qualche modo, contiene una buona dose di verità circa la struttura atomica. Il suo difetto principale è quello di ignorare la *dualità onda – particella*.

Breve Bibliografia: