

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF<sup>1</sup> -

## Esercizio 6 (Corpo Nero)

Consideriamo un pianeta P a distanza  $r_{SP}$  dal Sole (in Unità Astronomiche  $r_{ST} = 1UA = 1.496 \cdot 10^{11} m$ ) e di raggio  $R_p$ .

- a) Calcolare la costante solare del pianeta (ovvero il flusso di energia solare intercettato dal pianeta)  $f_{SP}$ .  
Trovare la costante solare per i Pianeti del Sistema solare i cui dati sono presentati in Tab.1

Tab1

Pianeta	$r_{SP}(U.A.)$	Albedo	$T_p(oss)K$
Mercurio	0.387	0.06	623
Venere	0.723	0.71	240
Terra	1.000	0.33	253
Marte	1.524	0.15	250
Giove	5.203	0.73	123

- b) Nelle ipotesi:
- Il pianeta irraggia come un corpo nero:  $\beta \sigma T_p^4$
  - Il pianeta non ha un flusso di calore interno ( $\Phi_{p,int} = 0$ )
  - Il pianeta è un *buon conduttore di calore e rapidamente ruotante con atmosfera densa*:  $\beta = 4\pi R_p^2$
- Trovare la temperatura di equilibrio planetaria  $T_p$ .
- c) Applicare la legge dello spostamento di Wien per calcolare a quale lunghezza d'onda dello spettro elettromagnetico avviene il massimo di emissione della radiazione termica dei pianeti del Sistema Solare.
- d) Confrontare la luminosità riflessa di un pianeta, soprattutto nel visibile, e la luminosità del pianeta stesso emessa termicamente alla temperatura  $T_p(oss)$ .
- e) I risultati ottenuti al punto d) suggeriscono un metodo per la ricerca diretta di *pianeti extrasolari*. Nel visibile, infatti, la presenza di un pianeta, nei pressi di una stella simile al Sole, non è osservabile a causa dell'enorme splendore dell'astro. Confrontare l'emissione termica infrarossa di una stella simile al Sole alle lunghezze d'onda alle quali avviene il massimo dell'emissione per i pianeti, con l'emissione infrarossa di questi ultimi.

## Risoluzione

- a) La costante solare per il pianeta P è:

$$f_{SP} = \frac{L_S}{4\pi r_{SP}^2} = \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_e^4}{4\pi r_{SP}^2} = \frac{R_S^2}{r_{SP}^2} \sigma T_e^4$$

La tabella 2 riporta i risultati del calcolo della costante solare per i pianeti della Tab. 1:

<sup>1</sup> Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

Tab.2

Pianeta	r <sub>SP</sub> (U.A.)	Albedo	T <sub>P</sub> (oss)K	f <sub>SP</sub> (J/sm <sup>2</sup> )
Mercurio	0.387	0.06	623	9252
Venere	0.723	0.71	240	2651
Terra	1.000	0.33	253	1386
Marte	1.524	0.15	250	597
Giove	5.203	0.73	123	51

con T<sub>e</sub> = 5780K (Temperatura della fotosfera solare); R<sub>S</sub> = 7·10<sup>8</sup>m (Raggio del Sole);

σ = 5.670373(21)·10<sup>-8</sup> (J/s)/(m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>) (costante di Stefan)

- b) La temperatura di equilibrio planetaria T<sub>P</sub> si ottiene risolvendo la seguente equazione radiativa:

**Flusso incidente** sulla faccia del pianeta = **Flusso riflesso** dal pianeta + **Flusso assorbito** dal pianeta

cioè:

$$f_{SP}\pi R_p^2 = \alpha_p f_{SP}\pi R_p^2 + \text{Flusso assorbito dal pianeta}$$

da cui:

$$\text{Flusso assorbito dal pianeta} = (1 - \alpha_p) f_{SP}\pi R_p^2$$

e imponendo che:

$$\text{Irraggiamento del pianeta} = \text{Flusso assorbito dal pianeta}$$

cioè:

$$\beta\sigma T_p^4 = (1 - \alpha_p) f_{SP}\pi R_p^2$$

e quindi:

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{1 - \alpha_p}{4\pi\sigma R_p^2} f_{SP}\pi R_p^2} = \frac{T_e}{\sqrt{2}} \left(\frac{R_S}{r_{SP}}\right)^{1/2} (1 - \alpha_p)^{1/4}$$

con α<sub>p</sub> = albedo del pianeta (percentuale dell'energia incidente che è riflessa dal pianeta)

La Tab.3 riassume i risultati dei pianeti della Tab.1.

Tab.3

Pianeta	r <sub>SP</sub> (U.A.)	Albedo	T <sub>P</sub> (oss)K	f <sub>SP</sub> (J/sm <sup>2</sup> )	T <sub>P</sub> (calcolata)
Mercurio	0.387	0.06	623	9252	441
Venere	0.723	0.71	240	2651	241
Terra	1.000	0.33	253	1386	252
Marte	1.524	0.15	250	597	217
Giove	5.203	0.73	123	51	88

La relazione usata è una buona approssimazione per calcolare la temperatura di equilibrio planetaria; funziona meglio per la Terra e per Venere; Venere perché ha un'atmosfera densa e la Terra perché ruota rapidamente. Funziona peggio per Mercurio perché ha un'atmosfera assente. Infine, Giove, che ha un'atmosfera densa ed una rapida rotazione, mostra di possedere una temperatura più alta di quella ottenuta probabilmente per la presenza di una sorgente interna di calore, e quindi viene meno l'ipotesi  $\Phi_{P_{int}} = 0$ .

La temperatura di equilibrio planetaria,  $T_p$ , è la temperatura con la quale il pianeta *emette* nello spazio e **non deve confondersi** con la sua *temperatura superficiale*,  $T_{ps}$ , che è una quantità più complessa. La Tab.4 successiva riporta per i pianeti considerati in precedenza i valori di  $T_p$  (OSS) e di  $T_{ps}$ .

**Tab.4**

Pianeta	Albedo	$T_p$ (oss)	$T_{ps}$
Mercurio	0.06	623	623
Venere	0.71	240	753
Terra	0.33	253	287
Marte	0.15	250	250
Giove	0.73	123	-

Le differenze tra  $T_p$  e  $T_{ps}$  sono significative per Venere e la Terra. Non a caso questi sono gli unici pianeti che hanno una superficie al disotto di un'atmosfera consistente. La presenza dell'atmosfera, quindi delle nubi, rende più alti i valori dell'albedo di questi pianeti; pertanto la differenza  $T_{ps} - T_p$  è da attribuire alla presenza dell'atmosfera secondo il meccanismo dell'**effetto serra**.

c) Applichiamo la legge dello spostamento di Wien:

$$\lambda_{Max} = \frac{0.290}{T_p (OSS)}$$

per calcolare a quale lunghezza d'onda dello spettro elettromagnetico avviene il massimo di emissione della radiazione termica del pianeta. La Tab.5 mostra i risultati ottenuti.

**Tab.5**

Pianeta	$T_p$ (oss)	$\lambda_{MAX}(\mu m)^2$	Regione spettro e.m.
Mercurio	623	5	IR
Venere	240	12	IR
Terra	253	11	IR
Marte	250	12	IR
Giove	123	24	IR

Il massimo di emissione avviene nella parte infrarossa (IR) dello spettro elettromagnetico.

d) La luminosità riflessa di un pianeta è data da:

$$L_{Prif} = \pi R_p^2 \alpha_p f_{SP} = \frac{1}{4} \alpha_p \left( \frac{R_p}{r_{SP}} \right)^2 L_S$$

essa è irradiata nello spazio soprattutto nella regione del visibile, con  $L_S = 3.9 \cdot 10^{26} W$  (luminosità solare). La luminosità termica emessa dal pianeta è:

$$L_{PTh} = 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 (OSS)$$

quest'ultima è irradiata dal pianeta nella regione dell'InfraRosso (IR).

I risultati sono mostrati in Tab.6

**Tab.6**

Pianeta	Albedo	$r_{SP}(m)$	$R_p(m)$	$T_p(K)$	$L_{Prif}(L_S)$	$L_{PTh}(L_S)$	$L_{Prif}/L_{PTh}$
---------	--------	-------------	----------	----------	-----------------	----------------	--------------------

<sup>2</sup>  $1\mu m = 1 \text{micrometro} = 10^{-6} m$

Mercurio	0.06	$5.79 \cdot 10^{10}$	$2.44 \cdot 10^6$	623	$2.66 \cdot 10^{-11}$	$1.66 \cdot 10^{-9}$	0.016
Venere	0.71	$1.08 \cdot 10^{11}$	$6.05 \cdot 10^6$	240	$5.57 \cdot 10^{-10}$	$2.25 \cdot 10^{-10}$	2.480
Terra	0.33	$1.5 \cdot 10^{11}$	$6.40 \cdot 10^6$	253	$1.50 \cdot 10^{-10}$	$3.10 \cdot 10^{-10}$	0.484
Marte	0.15	$2.28 \cdot 10^{11}$	$3.39 \cdot 10^6$	250	$8.32 \cdot 10^{-12}$	$8.33 \cdot 10^{-11}$	0.099
Giove	0.73	$7.78 \cdot 10^{11}$	$7.15 \cdot 10^7$	123	$1.54 \cdot 10^{-9}$	$2.16 \cdot 10^{-9}$	0.712

A parte Venere, a causa della sua densa atmosfera, i pianeti sono più luminosi nell'infrarosso!

- e) L'emissione termica infrarossa del Sole alle lunghezze d'onda alle quali avviene il m. Ciò suggerisce un metodo per la ricerca diretta di *pianeti extrasolari*. Nel visibile, infatti, la presenza di un pianeta, nei pressi di una stella simile al Sole, non è osservabile a causa dell'enorme splendore dell'astro. Ciò è mostrato chiaramente nella 6ª colonna della tabella. Assimo dell'emissione (Tab.5.) per i pianeti si trova:

$$L_{SIR}(\lambda_{IR}, T_{eS}) = 4\pi R_S^2 F_S(\lambda_{IR}, T_{eS})$$

con:

$$F_{SIR}(\lambda_{IR}, T_{eS}) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_{IR}^5} \frac{\Delta\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_{IR} k_B T_{eS}}\right) - 1}$$

dove:  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{^\circ K}$ ,  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ,  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ ,  $\Delta\lambda = 10^{-8} = 1 \text{ \AA}$ .

L'emissione termica infrarossa per i pianeti è ottenuta mediante:

$$L_{PIR}(\lambda_{IR}, T_P) = 4\pi R_P^2 F_P(\lambda_{IR}, T_P)$$

con:

$$F_{PIR}(\lambda_{IR}, T_P) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_{IR}^5} \frac{\Delta\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda_{IR} k_B T_P}\right) - 1}$$

La Tab.7 riassume i risultati ottenuti:

**Tab.7**

Pianeta	$\lambda_{Max}(m)$	$R_P(m)$	$T_P(K)$	$L_{PIR}(Watt)$	$L_{SIR}(Watt)$	$L_{PIR}/L_{SIR}$
Mercurio	$4.56 \cdot 10^{-6}$	$2.44 \cdot 10^6$	623	$8.97 \cdot 10^{12}$	$1.47 \cdot 10^{20}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$
Venere	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$6.05 \cdot 10^6$	240	$4.68 \cdot 10^{11}$	$3.87 \cdot 10^{18}$	$1.21 \cdot 10^{-7}$
Terra	$1.15 \cdot 10^{-5}$	$6.40 \cdot 10^6$	253	$6.82 \cdot 10^{11}$	$4.75 \cdot 10^{18}$	$1.44 \cdot 10^{-7}$
Marte	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$3.39 \cdot 10^6$	250	$1.81 \cdot 10^{11}$	$4.53 \cdot 10^{18}$	$3.99 \cdot 10^{-7}$
Giove	$2.36 \cdot 10^{-5}$	$7.15 \cdot 10^7$	123	$2.31 \cdot 10^{12}$	$2.81 \cdot 10^{17}$	$8.23 \cdot 10^{-6}$

La 7 colonna della Tab.7 mostra inequivocabilmente che, nell'infrarosso, i rapporti  $L_{PIR}/L_{SIR}$  sono *più favorevoli* per le osservazioni di un fattore circa 1000 rispetto al visibile.

Breve Bibliografia:

B. Buonauro: Tesi in Didattica della Fisica, Università "Federico II" di Napoli, a.a. 1997-98;

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF<sup>3</sup> -

## Esercizio 7 ( Natura corpuscolare della luce)

Planck, profondo estimatore della sintesi maxwelliana, non riusciva a credere che un oscillatore potesse esistere solo in livelli discreti di energia, perché l'idea metteva in crisi la stessa concezione del campo elettromagnetico continuo: se l'energia si conserva durante il processo di emissione, una quantità fissa di energia ( $h\nu$ ) deve improvvisamente essere trasferita al campo e questo comporta una qualche localizzazione nello spazio che si accorda male con l'idea di un campo continuo presente ovunque.

Inoltre, l'idea di Planck della "quantizzazione" dell'energia degli oscillatori all'interno di una cavità nera, implica, una "quantizzazione" anche dell'energia emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica. Infatti, se un oscillatore carico cambia la sua energia (ad es.: da  $2h\nu$  a  $h\nu$ ) lo deve fare molto rapidamente, perché non può avere stati energetici intermedi, e deve, quindi, sbarazzarsi in gran fretta dell'eccesso energetico  $h\nu$ , emettendolo sotto forma di radiazione elettromagnetica.

Supponendo che l'oscillatore carico sia l'elettrone, stimare il tempo di emissione  $\Delta t_{\text{emiss}}$  da parte di un elettrone.

## Risoluzione

Per risolvere l'esercizio calcoliamo il **raggio classico dell'elettrone**. Supporremo, quindi, che la massa dell'elettrone non sia una qualità intrinseca dell'elettrone stesso ma una "conseguenza" dell'energia di interazione, o meglio di autointerazione<sup>4</sup>.

Supponiamo che l'elettrone sia paragonabile ad una sfera conduttrice carica (pertanto la sua carica è distribuita uniformemente sulla sua superficie). Il campo elettrico all'interno della sfera conduttrice è nullo, mentre al di fuori è uguale a quello di una carica puntiforme:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \hat{r} & \dots\dots\dots r > R \end{cases}$$

Il potenziale si ottiene integrando il campo, oppure ricordando che un conduttore è equipotenziale e che al di fuori della sfera il potenziale è uguale a quello di una carica puntiforme:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R} & \dots\dots\dots r \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} & \dots\dots\dots r > R \end{cases}$$

la densità di energia è:

<sup>3</sup> Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

<sup>4</sup> Questa idea non è del tutto peregrina, infatti, in una forma diversa e più corretta dal punto di vista concettuale e matematico, è alla base del cosiddetto **meccanismo di Higgs** in base al quale le particelle dotate di massa traggono questa loro caratteristica dall'interazione con una particella particolare, il **bosone di Higgs** appunto, il cui ruolo sarebbe solo quello di "fornire" massa alla materia. Le considerazioni successive che faremo per il calcolo del raggio classico dell'elettrone non sono però coerenti con i risultati della Meccanica Quantistica ( Teoria Quantistica dei Campi) e d'altra parte finora nessun esperimento ha evidenziato la necessità di descrivere lo stato dinamico di un elettrone con variabili diverse dalla sua posizione, velocità e spin. Quindi, allo stato attuale della conoscenza, l'elettrone è un punto materiale quantistico.

$$u_{el}(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) = \begin{cases} 0 & \dots \dots \dots r \leq R \\ \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{e^2}{r^4} & \dots \dots \dots r > R \end{cases}$$

l'energia elettrostatica si trova integrando la densità d'energia su tutto lo spazio:

$$\begin{aligned} U_{el} &= \int_{spazio} u_{el}(r) dV = \int_0^R u_{el,int}(r) 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty u_{el,est}(r) 4\pi r^2 dr = \\ &= 0 + \int_R^\infty \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} \end{aligned}$$

In questo calcolo il raggio della sfera elettronica viene mantenuto incognito, ma viene successivamente fissato imponendo che questa energia sia equivalente all'energia relativistica a riposo dell'elettrone, cioè:

$$U_{el} = m_e c^2$$

Uguagliando le due espressioni di  $U_{el}$

$$\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} = m_e c^2$$

si ottiene:

$$R = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} \cong 1.4 \cdot 10^{-13} m$$

Si noti che  $R$  è inversamente proporzionale alla massa della particella, per cui il raggio classico dell'elettrone è maggiore di quello del protone che ha massa maggiore dell'elettrone.

Il tempo di emissione  $\Delta t_{emiss}$  da parte dell'elettrone non può essere inferiore al tempo che impiega la luce ad attraversare l'elettrone stesso, quindi:

$$\Delta t_{emiss} = \frac{2R}{c} \cong 9.4 \cdot 10^{-22} s$$

D'altra parte la rapidità dell'emissione implica una localizzazione spaziale della radiazione stessa che non può più estendersi su grandi volumi come accadeva nel caso classico.

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002;

N.Fusco: Rubrica "Chiedi all'esperto" (5-10-207) <http://www.vialattea.net/esperti/php/risposta.php?num=12155>

D.Cauz: Fisica Generale 2 Università di Udine <http://www.fisica.uniud.it/~cauz/Corso di Fisica 2.htm>

## ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF<sup>5</sup> -

### Esercizio 8 ( Natura corpuscolare della luce)

L'effetto fotoelettrico fu scoperto nel 1887 da Hertz e Hallwachs. Esso consiste nell'emissione di elettroni da parte di superfici metalliche irraggiate con radiazione elettromagnetica di frequenza  $\nu$  e intensità  $I(\nu)$  [watt/m<sup>2</sup>].

Le principali caratteristiche dell'effetto fotoelettrico sono:

- 1) Si verifica solo se  $\nu > \nu_0$  (frequenza di soglia che dipende dal materiale metallico della superficie irraggiata).
- 2) L'energia cinetica massima degli elettroni emessi,  $K_{\max}$ , dipende linearmente dalla frequenza  $\nu$ :

$$K_{\max} = a\nu - W_e$$

con  $W_e \equiv$  lavoro di estrazione, che dipende dal materiale colpito dalla radiazione ( sperimentalmente risulta  $a=h$ ).

- 3)  $K_{\max}$  è indipendente dall'intensità  $I(\nu)$  della radiazione incidente.
- 4) Il numero,  $n_e$ , di elettroni emessi per unità di tempo è direttamente proporzionale a  $I(\nu)$
- 5) Gli elettroni sono emessi istantaneamente.

L'interpretazione teorica del fenomeno rimase per circa 14 anni un problema aperto. Un modello ragionevole per questo processo, ispirato al modello atomico di Thompson, assumeva che gli elettroni, particelle di massa  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  Kg e carica  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb fossero legati elasticamente ad atomi di dimensioni dell'ordine di  $R_A = 3 \cdot 10^{-10}$  m e soggetti a una forza viscosa di costante  $\eta = (2m)/\tau$ , con  $\tau \equiv$  tempo di rilassamento atomico, cioè il tempo impiegato dall'atomo a disperdere la sua energia tramite irraggiamento o urti, che è circa  $\tau = 10^{-8}$  s.

A tal uopo si consideri un elettrone che si muove in unica direzione (moto unidimensionale) legato elasticamente all'atomo che si muove sotto l'influenza del campo elettrico oscillante della radiazione elettromagnetica che lo investe, la sua equazione del moto è:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} - eE_0 \cos(\omega t)$$

Ipotizziamo l'esistenza di molti atomi con frequenze diverse e distribuite in qualche modo continuo intorno a:

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 10^{15} \text{ Hz}$$

- a) Dimostrare che la soluzione completa dell'equazione differenziale del 2° ordine lineare a coefficienti costanti è:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi) + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

con:

$$\alpha = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m}; \quad \text{tg } \phi = \frac{2\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_0^2)}; \quad x_0 = \frac{-eE_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{4\omega^2}{\tau}}}$$

- b) Per la determinazione di  $A_1$  e  $A_2$  si faccia uso delle condizioni iniziali:  $x = \frac{dx}{dt} = 0$ .

- c) L'effetto fotoelettrico avviene quando:  $x_0 \geq R_A$ , Quindi dimostrare che, lontano dalla risonanza, risulta:

<sup>5</sup> Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

$$E_0 \geq \frac{\omega^2 m}{e} R_A$$

e l'intensità  $I(\nu)$  del fascio luminoso incidente sul metallo è data da:

$$I\left(\nu = \frac{\omega}{2\pi}\right) \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left(\frac{\omega^2 m}{e} R_A\right)^2$$

Inserendo i valori delle costanti dimostrare che si trova:  $I(\nu) \geq 10^{15} \text{W/m}^2$  potenza sufficiente a vaporizzare istantaneamente qualunque elettrodo metallico. Pertanto il nostro modello non può rendere conto dell'effetto fotoelettrico fuori dalla risonanza.

d) In caso di risonanza  $\omega = \omega_0$  dimostrare che si ha:

$$\phi = \phi_0 = -\frac{\pi}{2}; A = -x_0; x = \frac{eE_0\tau}{2m\omega_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \sin(\omega_0 t)$$

dimostrare, pertanto, che la condizione per avere l'effetto fotoelettrico è:

$$E_0 \geq \frac{2m\omega_0 R_A}{e\tau}$$

e quindi l'intensità  $I(\nu)$  del fascio luminoso incidente sul metallo è data da:

$$I\left(\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left(\frac{2m\omega_0 R_A}{e\tau}\right)^2$$

Inserendo i valori delle costanti dimostrare che si trova:  $I(\nu) \geq 10^2 \text{W/m}^2$

In conclusione il nostro modello stabilisce una soglia sulla potenza del fascio e non sulla frequenza.

e) Dimostrare per Intensità dell'ordine  $10^{-10} \text{W/m}^2$  l'energia cinetica acquisita dall'elettrone  $10^{-27} \text{J}$  che è un valore molto più piccolo di quello termico a temperatura ambiente  $\cong 10^{-20} \text{J}$ .

## Risoluzione

a) L'equazione differenziale omogenea associata è:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

L'equazione caratteristica è:

$$m\alpha^2 + \eta\alpha + k = 0$$

la cui soluzione è data da:

$$\alpha = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m}$$

Ricordando che  $\eta = (2m)/\tau$  sostituendo nella soluzione per  $\alpha$  troviamo:

$$\alpha = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\eta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$$

Essendo  $\tau = 10^{-8} \text{s}$  allora  $1/\tau^2 = 10^{16} \text{s}^{-2}$  mentre essendo  $\omega_0 \cong 10^{15} \text{Hz}$  allora  $\omega_0^2 \cong 10^{30} \text{Hz}^2$  e pertanto:  $1/\tau^2 \ll \omega_0^2$ .

La soluzione  $\alpha$  dell'equazione caratteristica risulta quindi:

$$\alpha \cong -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_0 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{\tau} - i\omega_0; \alpha_2 = -\frac{1}{\tau} + i\omega_0$$

Ricordando che la soluzione dell'equazione omogenea è del tipo  $Ae^{\alpha t}$  troviamo, per il principio di sovrapposizione, che la soluzione dell'omogenea associata è:



$$x_{omog}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

$A_1$  e  $A_2$  sono costanti da determinare con le opportune condizioni iniziali.

Per la soluzione particolare, cerchiamone una di tipo oscillante con la frequenza  $\omega$  del campo elettrico forzante dell'onda elettromagnetica che investe l'elettrone:

$$x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

affinché soddisfi l'equazione deve essere:

$$\frac{d}{dt} [x_0 \cos(\omega t + \phi)] = -x_0 \omega \sin(\omega t + \phi); \quad \frac{d^2}{dt^2} [x_0 \cos(\omega t + \phi)] = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

sostituendo nell'equazione differenziale si trova:

$$-m x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \eta x_0 \omega \sin(\omega t + \phi) + k x_0 \cos(\omega t + \phi) = -e E_0 \cos(\omega t)$$

cioè:

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2) x_0 \cos(\omega t + \phi) &= \eta x_0 \omega \sin(\omega t + \phi) - e E_0 \cos(\omega t) \\ (k - m\omega^2) x_0 [\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi] &= \\ &= \eta x_0 \omega [\sin(\omega t) \cos \phi + \cos(\omega t) \sin \phi] - e E_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Raggruppando i termini in  $\cos \omega t$  e in  $\sin \omega t$  abbiamo:

$$\begin{aligned} [(k - m\omega^2) x_0 \cos \phi - \eta x_0 \omega \sin \phi + e E_0] \cos(\omega t) + \\ + [-(k - m\omega^2) x_0 \sin \phi - \eta x_0 \omega \cos \phi] \sin(\omega t) = 0 \end{aligned}$$

poiché vogliamo che la condizione sia soddisfatta identicamente abbiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (k - m\omega^2) x_0 \cos \phi - \eta x_0 \omega \sin \phi + e E_0 = 0 \\ -(k - m\omega^2) x_0 \sin \phi - \eta x_0 \omega \cos \phi = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \phi = -\frac{\eta \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ x_0 = \frac{-\frac{e E_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} \end{cases}$$

con:

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}; \quad \sin \phi = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{\frac{2\omega}{\tau}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$$

- b) Per la determinazione delle costanti  $A_1$  e  $A_2$  scriviamo la soluzione generale completa dell'equazione differenziale:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} - eE_0 \cos(\omega t)$$

nella forma:

$$x_0 \cos(\omega t + \phi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

in cui abbiamo scritto la soluzione dell'omogenea:

$$x_{omog}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau} - i\omega_0 t} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau} + i\omega_0 t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

il ruolo delle due costanti arbitrarie  $A_1$  e  $A_2$  è preso dalle costanti  $A$  e  $\phi_0$  che determiniamo mediante le condizioni iniziali:  $x(t=0) = 0$ ;  $\dot{x}(t=0) = 0$ .

Troviamo prima l'espressione generale di

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t + \phi) - \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t + \phi_0) - A \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Pertanto le condizioni iniziali ora si scrivono:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \cos \phi + A \cos \phi_0 = 0 \\ \dot{x}(t=0) = -x_0 \omega \sin \phi - \frac{A}{\tau} \cos \phi_0 - A \omega_0 \sin \phi_0 = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x_0 \cos \phi + A \cos \phi_0 = 0 \\ x_0 \omega \sin \phi = -A \left( \frac{1}{\tau} \cos \phi_0 + \omega_0 \sin \phi_0 \right) \end{cases}$$

manipolando sia la prima che la seconda equazione del sistema troviamo:

$$\begin{cases} -\frac{x_0}{A} = \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi} \\ \frac{\cos \phi_0}{\cos \phi} \omega \sin \phi = \frac{\cos \phi_0}{\tau} + \omega_0 \sin \phi_0 \end{cases}$$

ed in definitiva:

$$\begin{cases} A = -\frac{\cos \phi}{\cos \phi_0} x_0 \\ \operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{\omega_0 \tau} \end{cases}$$

Queste equazioni ci forniscono informazioni sufficienti per discutere l'effetto fotoelettrico senza che sia necessario sostituire in modo esplicito l'espressione di  $A$  nella soluzione generale.

- c) L'effetto fotoelettrico avviene con la liberazione dell'elettrone dal legame atomico quando l'ampiezza dello spostamento  $x$  supera il raggio atomico: lo spostamento appare la somma di due contributi, il primo corrisponde all'oscillazioni a regime, il secondo al transiente con costante tempo  $\tau$ .

Le massime ampiezze potrebbero corrispondere ad entrambi casi. Per decidere bisogna confrontare  $x_0$  con  $A$ .

Dal sistema risulta che il modulo di  $A$  è dello stesso ordine di grandezza di quello di  $x_0$  (a meno che  $\cos \phi_0 \ll \cos \phi$ ). La seconda equazione del sistema se  $\tan \phi_0$  è grande, lo è anche  $\tan \phi$  dato che:

$\frac{1}{\omega_0 \tau} \cong 10^{-7}$ ;  $\omega \cong \omega_0$ . Dunque, l'ordine di grandezza dello spostamento massimo è quello di  $x_0$  e può essere sensibile al valore della frequenza del campo elettrico. Questo accade nel regime di risonanza in cui

$$\omega - \omega_0 \leq 2\sqrt{\frac{\omega}{\tau}}.$$

- Caso generico:  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow |x_0| \cong \frac{eE_0}{\omega^2 m}$ . Pertanto l'effetto fotoelettrico si ha quando:

$$\frac{eE_0}{\omega^2 m} \geq R_A$$

Questa relazione permette di ricavare il massimo valore del campo elettrico della radiazione che incide sul metallo:

$$E_0 \geq \frac{R_A \omega^2 m}{e}$$

Con questo valore possiamo stimare la potenza massima d'illuminazione del metallo:

$$I\left(\nu = \frac{\omega}{2\pi}\right) \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left(\frac{\omega^2 m R_A}{e}\right)^2 \cong 10^{15} \frac{W}{m^2}$$

potenza difficile da realizzare e comunque sufficiente a vaporizzare istantaneamente qualunque elettrodo. Dobbiamo concludere che il nostro modello non può rendere conto dell'effetto fotoelettrico fuori dalla risonanza.

d) Nel caso di risonanza:  $\omega = \omega_0$ , il sistema al punto a) porge:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \phi = \frac{2\omega}{\tau(\omega^2 - \omega_0^2)} \rightarrow -\infty \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} \\ x_0 = \frac{-\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}} = -\frac{eE_0 \tau}{2m\omega_0} \end{array} \right.$$

e il sistema al punto b):

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{\cos \phi}{\cos \phi_0} x_0 \\ \operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{tg} \phi - \frac{1}{\omega_0 \tau} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -x_0 \\ \phi_0 = \phi \end{array} \right.$$

per cui la soluzione risonante risulta:

$$x(t) = -\frac{eE_0 \tau}{2m\omega_0} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \sin(\omega_0 t)$$

L'effetto fotoelettrico in condizioni di risonanza si avrà quando:

$$\frac{eE_0\tau}{2m\omega_0} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \geq R_A$$

cioè quando:

$$E_0 \geq \frac{2m\omega_0 R_A}{e\tau}$$

e quindi l'intensità  $I(\nu)$  del fascio luminoso incidente sul metallo è data da:

$$I\left(\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \geq \frac{1}{2} c \varepsilon_0 \left( \frac{2m\omega_0 R_A}{e\tau} \right)^2 \cong 100 \frac{W}{m^2}$$

ed evidentemente i tempi necessari per raggiungere l'ampiezza di fuga sono dell'ordine di grandezza di  $\tau$ .

In conclusione il nostro modello stabilisce una soglia sulla potenza del fascio e non sulla frequenza. La condizione che riguarda la frequenza è quella di risonanza per cui l'effetto cesserebbe sia sotto, sia sopra le frequenze risonanti presenti negli atomi dell'elettrodo.

e) Nel transiente ( $t \ll \tau$ ) risulta:

$$x(t) = -\frac{eE_0 t}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

quindi, per ogni oscillazione  $t \cong \frac{2\pi}{\omega_0}$ , l'ampiezza di oscillazione cresce di:  $\frac{eE_0\pi}{m\omega_0^2}$ . Pertanto l'energia a disposizione dell'elettrone sarebbe:

$$kR_A \frac{eE_0\pi}{m\omega_0^2} = eE_0 R_A$$

cioè l'energia acquistata dall'elettrone soggetto al campo  $E_0$  attraversando l'atomo.

Per intensità di potenza da  $100W/m^2$  l'intensità del campo è  $E_0 \cong 100V/m$ , pertanto  $eE_0 R_A \cong 10^{-27} J \ll k_B T$ . E' evidente che il risultato proposto dal modello contrasta con i risultati sperimentali.

Breve Bibliografia:

C. M. Becchi - M. D'Elia -DISPENSE DEL CORSO DI FISICA MODERNA- Dipartimento di Fisica- Università degli Studi di Genova.

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF<sup>6</sup> -

## Esercizio 9 ( Natura corpuscolare della luce)

Einstein propose una descrizione dell'effetto fotoelettrico basata sull'ipotesi che l'energia non venga trasferita gradualmente dalla radiazione alla particella, ma in un processo elementare, cioè non scindibile. Egli propose che la luce, pur mantenendo le sue caratteristiche ondulatorie, avesse una distribuzione uniforme dell'energia, essendo costituita quest'ultima da certe piccolissime regioni( QUANTI o CORPUSCOLI della radiazione). La radiazione monocromatica di bassa densità si comporta in *senso termodinamico*, come se consistesse di QUANTI di RADIAZIONE, mutuamente indipendenti, di grandezza  $h\nu$ . In particolare  $\ll$  ...secondo l'ipotesi che qui voglio proporre, quando un raggio di luce si espande partendo da un punto l'energia non si distribuisce secondo volumi sempre più grandi, bensì rimane costituita da un numero finito di quanti di energia localizzati nello spazio e che si muovono *senza suddividersi* e che *non possono* essere assorbiti o emessi parzialmente.>><sup>7</sup>

- Si mostri come queste ipotesi conducono alla spiegazione immediata dell'effetto fotoelettrico.
- Un telecomando invia un fascio di radiazioni ultraviolette di lunghezza d'onda pari a 200 nm verso il disco metallico della cella fotoelettrica di un cancello automatico provocando l'emissione di elettroni la cui energia cinetica è uguale a  $5 \times 10^{-19}$  J. Calcolare:
  - la frequenza del fotone
  - la velocità dell'elettrone sapendo che la massa dell'elettrone è di  $9.1 \times 10^{-31}$  Kg
  - l'energia di legame in Joule e in eV e il potenziale di legame del disco metallico.
  - la frequenza di soglia.
  - il potenziale di arresto.

## Risoluzione

- Se la luce è composta di quanti di energia  $h\nu$ , tale quanto (chiamato *fotone* nome proposto dal chimico americano Gilbert Lewis nel 1926, anche se egli scelse questo nome per un'entità di sua invenzione: "Mi prendo perciò la libertà di proporre per questo nuovo atomo...il nome di fotone.. una nuova specie di atomo...non creabile e indistruttibile, che agisce come portatore dell'energia radiante". Il fotone di Lewis, quindi, era diverso da quello definito modernamente. Tuttavia il nome piacque, e fu adottato nel 1927 al V Congresso Solvay.<sup>8</sup>) cede per urto "istantaneamente" la sua energia  $h\nu$  ad un elettrone di conduzione del metallo, questo viene emesso istantaneamente con un'energia cinetica massima  $K_{\max}$ , ottenuta applicando la conservazione dell'energia:

$$h\nu = K_{\max} + W_e$$

con  $W_e \equiv$  lavoro di estrazione dell'elettrone dal metallo.

Risulta pure una *frequenza di soglia*  $\nu_0$ , tale che se  $\nu < \nu_0$  l'elettrone non viene estratto dal metallo. Infatti essendo  $K_{\max} > 0$ :

$$K_{\max} = h\nu - W_e \geq 0 \Rightarrow \nu \geq \frac{W_e}{h} = \nu_0$$

Al disotto di  $\nu_0 = \frac{W_e}{h}$  il fenomeno non si manifesta.

Einstein prevede anche che il grafico di questa equazione,  $K_{\max} = h\nu - W_e$ , al variare della frequenza della luce eccitatrice sarebbe stato una retta, la cui pendenza ( $h$ ) non dipende dal materiale. A noi oggi può sembrare ovvio, ma Millikan, che fu il primo a verificarla sperimentalmente, ne rimase stupito.

<sup>6</sup> Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

<sup>7</sup> A. Einstein- *Emissione e Trasformazione della Luce da un punto di vista euristico- Teoria dei quanti di luce*, Roma, Newton Compton, 1972

<sup>8</sup> A. Garuccio- *L'effetto fotoelettrico: la storia* - <http://www.ba.infn.it/~garuccio/didattica/fotoelettrico/storia/lewis.htm>

Tra il 1914 e il 1916 Robert Millikan effettuò accurate misure per la verifica sperimentale dell'equazione fotoelettrica di Einstein che può scriversi:

$$K_{\max} = eV = h\nu - W_e \Rightarrow V = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_e}{e}$$

V è la ddp, fornita da una resistenza variabile inserita nel circuito misuratore, impiegata per arrestare gli elettroni. Millikan, quindi, partendo dalla misura del potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente, effettuò delle misure di h, trovando un valore pari a:  $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

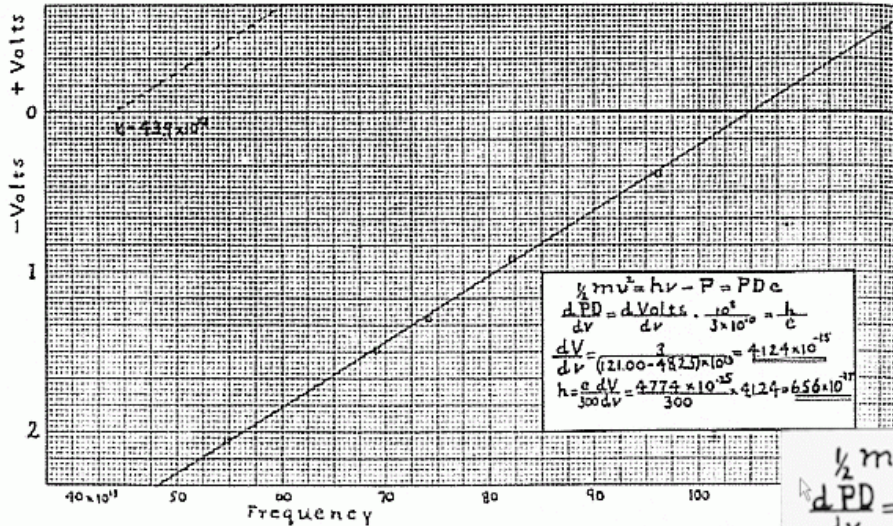


Grafico tratto dall'articolo di Millikan [R. A. Millikan, in *Physical Review* 7, 1916, p. 355] che rappresenta la relazione lineare tra il potenziale ritardatore critico  $V_0$  e la frequenza della luce, per una superficie fotosensibile di sodio. Come si vede, Millikan presentò il proprio calcolo della costante di Planck sulla base della sua curva sul grafico. (Concessa da *Physical Review*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= h\nu - P = PDe \\ \frac{dPD}{d\nu} &= \frac{d\text{Volts} \cdot 10^8}{3 \times 10^{10}} = \frac{h}{e} \\ \frac{dV}{d\nu} &= \frac{3}{(21.00 - 48.25) \times 10^8} = 4.124 \times 10^{-15} \\ h &= \frac{e dV}{300 d\nu} = \frac{4.774 \times 10^{-25}}{300} \times 4.124 = 6.56 \times 10^{-27} \end{aligned}$$

b) - la frequenza del fotone incidente è ottenuta da:  $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$

- la velocità dell'elettrone è data da:  $v_e = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.05 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

-  $W_e = h\nu - K_{\max} = 6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 1.5 \cdot 10^{15} - 5 \cdot 10^{-19} = 4.9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{4.9 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 3.06 \text{ eV}$

- La frequenza di soglia  $\nu_0$  è data da:  $\nu_0 = \frac{W_e}{h} = \frac{4.9 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}} = 7.4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

-Il potenziale di arresto:  $V = \frac{K_{\max}}{e} = \frac{5 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 3.1 \text{ Volt}$

Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002

# ESERCIZI DI MECCANICA QUANTISTICA

B. Buonaura : ISIS "ALBERTINI" -NOLA (NA) & GSF-AIF<sup>9</sup> -

## Esercizio 10 ( *Natura corpuscolare della luce* )

Con l'ipotesi dei quanti di luce nel 1905 Einstein non pensava alla descrizione *puramente corpuscolare* della luce, le equazioni di Maxwell non potevano essere cancellate. Tuttavia, Einstein credeva nell'esistenza di un'onda che *accompagnasse* il corpuscolo energetico nella sua propagazione e ne determinasse il comportamento. Questa era un'onda vuota di energia e di quantità di moto, aveva caratteristiche nuove rispetto a tutte le onde studiate in fisica classica. D'altra parte i fenomeni d'interferenza e diffrazione *non possono* essere certo spiegati da una concezione puramente corpuscolare. Quest'onda vuota di energia ed impulso, che non poteva essere eliminata dalla teoria, era ironicamente chiamata da Einstein "onda fantasma". Proprio grazie all'onda vuota per Einstein non vi era conflitto tra le osservazioni sperimentali che indicavano la natura ondulatoria della luce e quelle che ne esaltavano il carattere corpuscolare: <<...Bisogna tenere presente che le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi nel tempo e non a valori istantanei; sebbene abbiano assoluta conferma la teoria della diffrazione, della riflessione, ecc. ....è pensabile che la teoria della luce fondata su funzioni spaziali continue possa entrare in conflitto con l'esperienza qualora venga applicata a emissione e trasformazione della luce.>><sup>10</sup> Einstein assunse che fra l'energia  $E$  dei corpuscoli e la frequenza dell'onda intercorresse la relazione  $E = h\nu$  dove  $h$  è la costante di Planck. Si noti l'ineliminabilità dell'onda: la stessa energia del corpuscolo è determinata dalla frequenza dell'onda! Einstein era l'unico nel credere ai corpuscoli della radiazione e alle onde vuote. Anzi, lavorò molto a queste sue idee nel periodo 1909-17, riuscendo a dimostrare che tutta l'energia assorbita da un elettrone o da un atomo proveniva da una stessa direzione, per cui all'energia  $h\nu$  doveva essere associata una quantità di moto  $h\nu/c$  nella direzione di propagazione della luce. Le sue idee ricevettero clamorose conferme nel 1923-25 dagli esperimenti di Compton e di Compton e Simon.

Nel 1909 Einstein dimostrò che la formula di Planck si accordava bene con la sua concezione del campo elettromagnetico studiando le fluttuazioni energetiche della radiazione elettromagnetica in una cavità (dovute, ad esempio, alle fluttuazioni di temperatura).

Si consideri una cavità mantenuta da un termostato a temperatura costante  $T$ , sia  $E$  l'energia contenuta nel volume  $V$  (tutto interno alla cavità, ma arbitrario). L'energia  $E$  è radiazione elettromagnetica con frequenza compresa nell'intervallo  $[\nu, \nu+d\nu]$ , pur essendo  $E$  una quantità infinitesima, seguendo Lorentz scriveremo:

$$E = u(\nu, T) d\nu V$$

Il valor medio di questa energia all'equilibrio è  $E_0$ . E si potrà discostare da esso per puri motivi accidentali: ad esempio perché ad un certo istante le molecole del termostato, che colpiscono le pareti esterne della cavità sono più veloci della media, simulando per un breve periodo di tempo una fluttuazione di temperatura  $T+dT$  e quindi un termostato più caldo. Sia  $P(E)$  la probabilità che ad un certo istante l'energia elettromagnetica abbia valore. Ovviamente il massimo di  $P(E)$  è

in  $E = E_0$  e quindi  $\left. \frac{dP}{dE} \right|_{E_0} = 0$ . La funzione  $P(E)$  deve decrescere rapidamente non appena  $E$  si allontana da  $E_0$ . E'

utile considerare il  $\log P(E)$ , dato che il logaritmo di  $P(E)$  è proporzionale all'entropia  $S$  del sistema.

Possiamo pensare di sviluppare  $\log P(E)$  in termini dell'energia  $E$  fino al 2° ordine:

$$\log P(E) = \log P(E_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 P(E)}{dE^2} \right|_{E_0} (E - E_0)^2$$

- a) Se l'entropia  $S$  di uno stato del sistema è legata alla probabilità  $P(E)$  dalla relazione:

$$S = k_B \log P(E)$$

dove  $k_B$  è la costante di Boltzmann, mostrare che:

<sup>9</sup> Gruppo di Storia della Fisica- Associazione per l'Insegnamento della Fisica.

<sup>10</sup> A. Einstein -Annalen der Physik- n.17 (1905) pag.132

$$\log P(E) = \log P(E_0) + \frac{1}{2k_B} \left. \frac{d^2 S(E)}{dE^2} \right|_{E_0} (E - E_0)^2$$

b) Utilizzando la relazione termodinamica:

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{dS}{dT} \right)_V$$

mostrare che si può scrivere:

$$P(E) = P(E_0) e^{-a(E-E_0)^2}$$

dove  $a = \frac{1}{2k_B T^2} \left( \frac{dT}{dE} \right)_{E_0}$ .

c) Lo scarto quadratico medio dell'energia è  $\overline{\Delta E^2} = \overline{(E - E_0)^2}$  mostrare che:

$$\overline{\Delta E^2} = k_B T^2 \left( \frac{dT}{dE} \right)_{E_0}^{-1}$$

d) Supponiamo che il risultato c) valga sia per variazioni continue di energia, sia per variazioni discrete di energia mostrare che:

$$\overline{\Delta E_{RJ}^2} = \frac{c^3}{8\pi v^2} \frac{E_{RJ}^2}{d\nu V} \quad \text{Rayleigh-Jeans}$$

$$\overline{\Delta E_W^2} = h\nu E_W \quad \text{Wien}$$

$$\overline{\Delta E_P^2} = \frac{c^3}{8\pi v^2} \frac{E_P^2}{d\nu V} + h\nu E_P \quad \text{Planck}$$

dove  $E_{RJ}$ ,  $E_W$  ed  $E_P$  sono le espressioni di  $E$  rispettivamente ottenute sostituendo al posto  $u(v,T)$  le espressioni ottenute da Rayleigh-Jeans, Wien e Planck.

## Risoluzione

a) Se  $S(E) = k_B \log P(E)$  allora  $\log P(E) = \frac{1}{k_B} S(E)$ , quindi:

$$\frac{d^2 \log P(E)}{dE^2} = \frac{d^2}{dE^2} \left[ \frac{S(E)}{k_B} \right] = \frac{1}{k_B} \frac{d^2 S}{dE^2}$$

quindi:

$$\log P(E) = \log P(E_0) + \frac{1}{2k_B} \left. \frac{d^2 S(E)}{dE^2} \right|_{E_0} (E - E_0)^2$$

b) La definizione di Clausius della variabile entropia è:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

dove  $\delta Q$  è la quantità di calore assorbita o ceduta in maniera reversibile e isoterma dal sistema a temperatura  $T$ . Per il primo principio della termodinamica:

$$dU = \delta Q - PdV$$



quindi:

$$dU = TdS - PdV$$

Se consideriamo l'energia interna U come funzioni delle variabili S e V possiamo scrivere:

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV$$

Uguagliando le due precedenti espressioni per dU otteniamo:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T \quad ; \quad \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = -P$$

quindi:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{T}$$

Poiché la cavità ha volume costante si può scrivere:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$$

Naturalmente U è sempre l'energia interna delle pareti alla temperatura T e appare in parte come movimento di vibrazione degli oscillatori di cui la parete è composta e parte come energia potenziale degli stessi oscillatori.

Tuttavia Planck usò per U non l'energia interna dell'intera sostanza, ma l'energia media degli oscillatori e ciò equivale ad una *nuova definizione* microscopica di temperatura assoluta.

L'energia E del campo elettromagnetico ha un ruolo sicuramente simmetrico a quello dell'energia U degli oscillatori. In particolare ciò permette di estendere la relazione precedente a:

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

per cui

$$\frac{d^2 S}{dE^2} = -\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dE}$$

quindi utilizzando il risultato ottenuto per a):

$$\log P(E) = \log P(E_0) - \frac{1}{2k_B T^2} \frac{dT}{dE} \Big|_{E_0} (E - E_0)^2$$

$$\log \left[ \frac{P(E)}{P(E_0)} \right] = -a(E - E_0)^2$$

$$\text{con } a = \frac{1}{2k_B T^2} \frac{dT}{dE} \Big|_{E_0} .$$

In definitiva otteniamo ricavando P(E):

$$P(E) = P(E_0) e^{-a(E-E_0)^2}$$

c) Lo scarto quadratico medio dell'energia è per definizione:

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (E - E_0)^2 P(E) dE}{\int_{-\infty}^{+\infty} P(E) dE}$$

Gli integrali sono estesi da  $-\infty$  a  $+\infty$  perché in ogni caso solo una piccola regione intorno al massimo  $P(E_0)$  dà valori significativi.

Ponendo  $u = E - E_0$  e  $du = dE$  otteniamo:

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-au^2} du}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du} = -\frac{d}{da} \log \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2} du \right] = -\frac{d}{da} \log \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2a} = k_B T^2 \frac{dE}{dT}$$

d) Se adottiamo l'approssimazione di Rayleigh-Jeans  $h\nu \ll k_B T$ :

$$E_{RJ} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T d\nu V$$

risulta:

$$\frac{dE_{RJ}}{dT} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B d\nu V$$

quindi:

$$\overline{\Delta E_{RJ}^2} = k_B T^2 \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B d\nu V = \frac{c^3}{8\pi \nu^2 d\nu} \frac{E_{RJ}^2}{V}$$

Se adottiamo l'approssimazione di Wien  $h\nu \gg k_B T$ :

$$E_W = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} d\nu V$$

risulta:

$$\frac{dE_W}{dT} = \frac{h\nu}{k_B T^2} E_W$$

quindi:

$$\overline{\Delta E_W^2} = k_B T^2 E_W \frac{h\nu}{k_B T^2} = h\nu E_W$$

Se adottiamo, infine, la relazione di Planck:

$$E_P = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu V$$

risulta:

$$\frac{dE_P}{dT} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \right)^2} \frac{h\nu}{k_B T^2} d\nu V$$

per cui possiamo scrivere:

$$\overline{\Delta E_P^2} = \frac{c^3}{8\pi \nu^2 d\nu} \frac{E_P^2}{V} + h\nu E_P$$

La formula di Planck esprime  $\overline{\Delta E^2}$  come somma di 2 termini:

1° simile al risultato di Rayleigh-Jeans **onde**

2° simile al risultato di Wien **corpuscoli**

Gli aspetti ondulatori e corpuscolari contribuiscono in modo additivo allo scarto quadratico medio dell'energia della radiazione di corpo nero.

### Breve Bibliografia:

F. Selleri: Dispense di ISTITUZIONI DI FISICA TEORICA, Università di Bari, Laurea in Fisica, a.a. 2001/2002