

avete introdotto direttamente, seguendo le istruzioni che compariranno sul video e fornendo un nome per il file che volete scrivere. In ogni caso l'uso piú interessante di questa opzione sarebbe il trattamento di dati acquisiti dall'esterno e memorizzati su disco, quali risultati di misure, di rilevamenti statistici, etc. (ricordate, però, che il numero di campioni deve essere una potenza di 2).

I file di secondo tipo possono essere costruiti da voi, usando varie funzioni matematiche e scrivendo un piccolo programma per lo scopo. Sul disco, comunque, ve ne sono alcuni già pronti, che ora vi elenchiamo.

Il file MODA rappresenta una modulazione di ampiezza, cioè una funzione del tipo:

$$f(t) = a \sin[1 + K_m \sin(2\pi f_m t)] \sin(2\pi f_p t)$$

dove f_p è la frequenza della portante, f_m quella della modulante e K_m il coefficiente di modulazione.

MODF rappresenta, invece, un caso di modulazione di frequenza:

$$f(t) = a \sin[2\pi f_p \cdot (1 + K_m \sin(2\pi f_m t)) \cdot t]$$

BEAT e BEAT1 contengono due casi di battimenti tra due note vicine, di ampiezza uguale nel primo caso e di ampiezza differente nel secondo.

Per finire, FEND è un impulso rettangolare: ma (purchè in ascisse mettiate una lunghezza, anzichè un tempo) potete considerarlo anche come la rappresentazione dell'intensità luminosa su una stretta fenditura. In tal caso lo spettro fornisce la figura di diffrazione (di Fraunhofer) corrispondente. A questo proposito leggete anche la nota al capitolo 6.

5.3 APPENDICE MATEMATICA

Qui di seguito cerchiamo di delineare gli aspetti matematici essenziali della teoria delle serie e delle trasformate di Fourier. Il livello è piú "tecnico" del resto del capitolo, tuttavia dovrebbe risultare ancora comprensibile (con un po' di buona volontà) a uno studente di 5^a liceo scientifico o del corso di perito informatico.

5.3.1 Serie di Fourier

L'idea centrale della teoria delle serie di Fourier è quella di approssimare un segnale periodico $s(t)$, di periodo T_0

$$s(t + T_0) = s(t)$$

con una combinazione lineare di segnali sinusoidali (e cosinusoidali) di frequenze multiple di quella $1/T_0$ del segnale di partenza:

$$s_A(t) = a_0/2 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)), \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 \quad (1^*)$$

Per scegliere gli a_k , b_k è necessario definire un criterio di "bontà" dell'approssimazione, che può essere la minimizzazione dell'errore quadratico medio su un periodo:

$$\epsilon = (1/T_0) \int_0^{T_0} [s(t) - s_A(t)]^2 dt \quad (2^*)$$

La scelta è ragionevole, perché ϵ assomma tutte le differenze "locali" fra $s(t)$ e la sua approssimazione $s_A(t)$: infatti, per la presenza dell'elevazione al quadrato, errori di segno opposto *non* si compensano.

Siamo, quindi, ricondotti ad un classico problema di estremo; considerando ϵ funzione degli a_k e dei b_k , il suo minimo si avrà per:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_k} = \frac{\partial \epsilon}{\partial b_k} = 0 \quad \forall k$$

Calcoliamo, con questa condizione, il coefficiente generico a_1 ($l > 0$), sostituendo nell'espressione di ϵ quella di $s_A(t)$ e derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial a_1} &= \frac{1}{T_0} \frac{\partial}{\partial a_1} \int_0^{T_0} [s(t) - a_0/2 - \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{\partial}{\partial a_1} [s(t) - a_0/2 - \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} 2 [s(t) - a_0/2 - \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))] \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left[- \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) \right] dt = \\ & = - \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[s(t) - a_0/2 - \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \right] \cdot \\ & \quad \cdot \cos(l\omega_0 t) dt = 0 \end{aligned}$$

Riarrangiando e scambiando l'integrale e la sommatoria:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} s(t) \cos(l\omega_0 t) dt - (a_0/2) \int_0^{T_0} \cos(l\omega_0 t) dt + \\ & - \sum_{k=1}^N a_k \int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) dt - \sum_{k=1}^N b_k \int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) dt = 0 \end{aligned}$$

E' lasciato come esercizio al lettore verificare che:

$$\int_0^{T_0} \cos(l\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cos(l\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq l \\ T_0/2 & \text{per } k = l \end{cases}$$

con il che la relazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} s(t) \cos(l\omega_0 t) dt - (T_0/2) a_l = 0, \text{ cioè} \\ & a_l = (2/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \cos(l\omega_0 t) dt, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (3^*) \end{aligned}$$

Procedendo analogamente per a_0 e per i b_l si trova:

$$a_0 = (2/T_0) \int_0^{T_0} s(t) dt \quad (4^*)$$

(che è l'estensione, per $l=0$, della (3*); è questa la ragione per cui il termine costante nella (1*) e' stato scritto come $a_0/2$)

$$b_l = (2/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \sin(l\omega_0 t) dt, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (5^*)$$

E' inoltre possibile dimostrare (ma non lo faremo qui) che con questa scelta per i coefficienti a_k , b_k l'errore ϵ tende a 0 per N che tende a infinito, almeno per una classe di segnali $s(t)$ abbastanza ampia da coprire tutti i casi di interesse pratico. Il che porta alla forma "classica" della Serie di Fourier:

$$s(t) = (a_0/2) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad (6^*)$$

Solitamente i manuali (diciamo di biennio universitario) partono da questa serie infinita, per dedurre le espressioni dei coefficienti (+). La deduzione utilizzata da noi ha, però, il merito di dimostrare che i coefficienti così determinati sono i "migliori" per ogni approssimazione finita della serie di Fourier. E le approssimazioni finite, non dimentichiamolo, sono le sole accessibili al calcolo, sia da parte della macchina, che di un operatore umano.

Ci sono forme alternative dello sviluppo di Fourier. Vediamo, un po' per esteso, quella che è chiamata la forma esponenziale della serie, perché è molto compatta e molto usata nelle applicazioni di teoria dei segnali e, in particolare, ci servirà per discutere della trasformata discreta di Fourier.

Il punto di partenza è la nota relazione di Eulero:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (7^*)$$

(con $j^2 = -1$). Dalla (7*) e dalla relazione che si ottiene da (7*), cambiando x in $-x$, si ha - rispettivamente sommando e sottraendo membro a membro:

$$\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2 \quad (8^*)$$

$$\sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$$

e, quindi, la (6*) può essere scritta:

$$s(t) = a_{0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [\exp(jk\omega_0 t) + \exp(-jk\omega_0 t)]/2 +$$

+) Per la caratterizzazione della classe di funzioni $s(t)$ sviluppabili in serie di Fourier, vedi [1],[2]. E' curioso che finora non si conoscano tutte le condizioni *necessarie* per la sviluppabilità, mentre sono note diverse condizioni *sufficienti*.

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k [\exp(jk\omega_0 t) - \exp(-jk\omega_0 t)] / (2j)$$

Riordinando:

$$s(t) = a_{0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - jb_k)/2] \exp(jk\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + jb_k)/2] \exp(-jk\omega_0 t)$$

(ricordare che $1/j = -j$)

poiché $a_{-k} = a_k$ (cos kx pari in k) e $b_{-k} = -b_k$ (sin kx dispari in k) cambiando il segno dell'indice nella seconda serie:

$$s(t) = a_{0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - jb_k)/2] \exp(jk\omega_0 t) + \sum_{k=-\infty}^{-1} [(a_k - jb_k)/2] \exp(jk\omega_0 t)$$

Se estendiamo la definizione (5*) dei b_k a $k=0$, si ha $b_0=0$, quindi anche il coefficiente di ordine 0 può essere messo nella forma

$$a_{0/2} = (a_0 - jb_0)/2$$

di modo che la serie diventa:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \exp(jk\omega_0 t) \quad (9^*)$$

con

$$\begin{aligned} c_k &= (a_k - jb_k)/2 = (1/T_0) \left[\int_0^{T_0} s(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \int_0^{T_0} s(t) \sin(k\omega_0 t) dt \right] = \\ &= (1/T_0) \int_0^{T_0} s(t) [\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)] dt \end{aligned}$$

cioè:

$$c_k = (1/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt \quad (10^*)$$

La (9*) è la serie di Fourier in forma *esponenziale*, i cui coefficienti sono dati dalle (10*).

Se, come è di solito nelle applicazioni, $s(t)$ è reale, i c_k hanno una particolare caratteristica di simmetria:

$$c_{-k} = (1/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \exp(jk\omega_0 t) dt = (1/T_0) \int_0^{T_0} [s(t) \exp(-jk\omega_0 t)]^* dt =$$

$$= [(1/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt]^* = c_k^*$$

dove con * si indica il complesso coniugato, tenendo presente che $[\exp(jx)]^* = \exp(-jx)$ e $s^*(t) = s(t)$, essendo $s(t)$ reale per ipotesi.

La (9*) può allora essere riscritta:

$$s(t) = c_0 + \sum_{-1}^{\infty} [c_k \exp(jk\omega_0 t) + c_k^* \exp(-jk\omega_0 t)]$$

Dal momento che $c_k = |c_k| \exp(j \cdot \text{Arg } c_k)$ la precedente diventa:

$$\begin{aligned} s(t) &= \\ &= c_0 + \sum_{-1}^{\infty} \{ |c_k| \exp(jk\omega_0 t + j \cdot \text{Arg } c_k) + |c_k| \exp(-jk\omega_0 t - j \cdot \text{Arg } c_k) \} = \\ &= c_0 + \sum_{-1}^{\infty} 2|c_k| \cdot \text{Re}[\exp(jk\omega_0 t + j \cdot \text{arg } c_k)] \end{aligned}$$

e in definitiva:

$$s(t) = c_0 + \sum_{-1}^{\infty} 2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \text{Arg } c_k) \quad (11^*)$$

che è la serie di Fourier di soli coseni (opportunamente sfasati).

Nei programmi FOURIER e FFT viene usata per la ricostruzione del segnale una serie di *seni*, ottenuta dalla (11*) mediante la relazione trigonometrica elementare $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$.

5.3.2 DFT e Serie di Fourier

Come abbiamo visto nel testo, la Trasformata Discreta di Fourier (DFT) su N punti di un segnale $s(t)$ di periodo T_0 è data per definizione da:

$$S_k = \sum_{i=0}^{N-1} s_i \exp(-j \cdot 2\pi i k / N) \quad (12^*)$$

con $s_i \equiv s(Ti)$, dove $T = T_0/N$ è il passo di campionamento.

E' immediato verificare dalla (12*) che $S_{k+N} = S_k$, che - cioè S_k è periodica, di periodo N . E', quindi, sufficiente considerare solo N valori successivi della (12*) solitamente, ma non obbligatoriamente, da $K=0$ a $K=N-1$.

La connessione fra DFT e serie di Fourier è immediata, se consideriamo che:

$$\int_0^{T_0} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt \approx$$

$$\approx T \sum_{i=0}^{N-1} s(Ti) \exp(-j \cdot 2\pi k Ti / T_0) = T \sum_{i=0}^{N-1} s_i \exp(-j \cdot 2\pi ki / N)$$

(è la piú semplice integrazione numerica: quella per rettangoli).

Quindi:

$$c_k = (1/T_0) \int_0^{T_0} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt \approx$$

$$\approx TS_k / T_0 = S_k / N \quad (13^*)$$

In altri termini gli S_k danno un'approssimazione dei coefficienti della serie esponenziale di Fourier.

L'approssimazione diventa *esatta* per N sufficientemente grande, se $s(t)$ è limitato in banda.

Supponiamo, infatti, che $s(t)$, reale per semplicità, sia tale che nel suo sviluppo $c_k = 0$ per $|k| > N_b$, che - cioè - $s(t)$ non contenga frequenze superiori a N_b/T_0 . Allora:

$$s(t) = \sum_{k=-N_b}^{N_b} c_k \exp(j \cdot 2\pi kt / T_0)$$

Fissato $N > 2N_b$ e posto, al solito, $s_i \equiv s(Ti)$, con $T = T_0/N$ e $i = 0, 1, \dots, N-1$ si ha:

$$s_i = \sum_{k=-N_b}^{N_b} c_k \exp(j \cdot 2\pi ki / N) \quad , \quad 0 \leq i \leq N-1$$

moltiplicando entrambi i membri per $\exp(-j \cdot 2\pi il / N)$, con $-N_b \leq l \leq N_b$ e sommando su i (da 0 a $N-1$), si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{N-1} s_i \exp(-j \cdot 2\pi il / N) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-N_b}^{N_b} c_k \exp(j \cdot 2\pi ki / N) \right) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi il / N)$$

Il primo membro è la DFT di $s(t)$, per cui:

$$S_l = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-N_b}^{N_b} c_k \exp(j \cdot 2\pi ki / N) \right) \cdot \exp(-j \cdot 2\pi il / N) =$$

$$= \sum_{k=-N_b}^{N_b} c_k \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \exp(j \cdot 2\pi (k-l)i / N) \quad (14^*)$$

Poichè $-N_b \leq k \leq N_b$, $-N_b \leq l \leq N_b$, $N > 2N_b$ allora $0 \leq |k-l| < N$. In queste condizioni la sommatoria su l all'ultimo membro della (14*) è uguale a N per $k=1$ e uguale a 0 per $k \neq 1$. Lo si può vedere, ricordando che:

$$\sum_{i=0}^{N-1} x^i = \begin{cases} (1-x^N)/(1-x) & \text{per } x \neq 1 \\ N & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

(somma di una progressione geometrica, con primo termine 1 e ragione x).

Nel nostro caso $x = \exp(j \cdot 2\pi(k-l)/N)$. Per $k=1$, $x=1$ e la somma è N . Per $k \neq 1$, nelle condizioni date su k e l , $x \neq 1$ ma $x^N = 1$. Ne deriva che la somma è nulla.

La (14*) dà, allora:

$$S_l = N c_l$$

ovvero, per la periodicità di S_l :

$$\begin{aligned} c_l &= S_l/N, & \text{per } 0 \leq l \leq N_b \\ c_l &= S_{l+N}/N, & \text{per } -N_b \leq l < 0 \end{aligned} \tag{15*}$$

E' da notare che la condizione $N > 2N_b$ va intesa in senso stretto. Infatti si può verificare che, se fosse $N = 2N_b$ le (15*) non varrebbero agli estremi $l = \pm N_b$.

D'altra parte è immediata una controprova essenziale: pensate ad una sinusoide di frequenza N_b , il cui sviluppo contiene ovviamente solo i termini di ordine $\pm N_b$: se la campionate uniformemente $N = 2n_b$ volte in T_0 , a partire da $t=0$, trovate $2N_b$ campioni nulli; quindi risultano nulli anche tutti i valori della DFT che, interpretati come coefficienti di Fourier, restituirebbero erroneamente una funzione identicamente nulla.

La conclusione interessante è che l'enunciato esatto del *teorema di Shannon*, per segnali a spettro discreto, dovrebbe essere:

Dato un segnale periodico di periodo T_0 (e quindi a spettro discreto), limitato in banda, per determinarlo completamente è necessario e sufficiente in un periodo un numero N di campioni più che doppio rispetto a N_b , dove N_b è l'ordine della massima armonica contenuta nel segnale.

Equivalentemente, dette $f_c = 1/T$ la frequenza di campionamento e $f_m = N_b/T_0$ quella massima contenuta nel segnale, deve essere $f_c > 2f_m$.

Come già notato nel testo, il risultato era prevedibile: per determinare un segnale (reale) periodico fino all'armonica N_b , sono, in effetti, necessari $2N_b + 1$ parametri reali indipendenti. Servono un'ampiezza e una fase per ciascuna delle N_b armoniche e il valor medio (cioè c_0), vale a dire servono $2N_b + 1$ misure: ad esempio - appunto - i campioni necessari per calcolare la DFT di ordine $2N_b + 1$.

5.3.3 I segnali aperiodici

Un segnale aperiodico è un segnale che non si ripete, che, cioè, ha inizio e fine nel tempo. Per esempio è aperiodico l'impulso definito da:

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } |t| \leq a \\ 0 & \text{per } |t| > a \end{cases}$$

In realtà, a ben vedere, tutti i segnali di interesse pratico sono aperiodici, perchè hanno - necessariamente - durata limitata. Si può estendere l'analisi armonica anche al caso di segnali aperiodici. Per capire come consideriamo un impulso contenuto in un intervallo di tempo T_0 (v. Fig. 5.12).

Possiamo sempre costruire la serie di Fourier (esponenziale) con i coefficienti dati da:

$$c_k = (1/T_0) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \exp(-jk\omega_0 t) dt \quad (16^*)$$

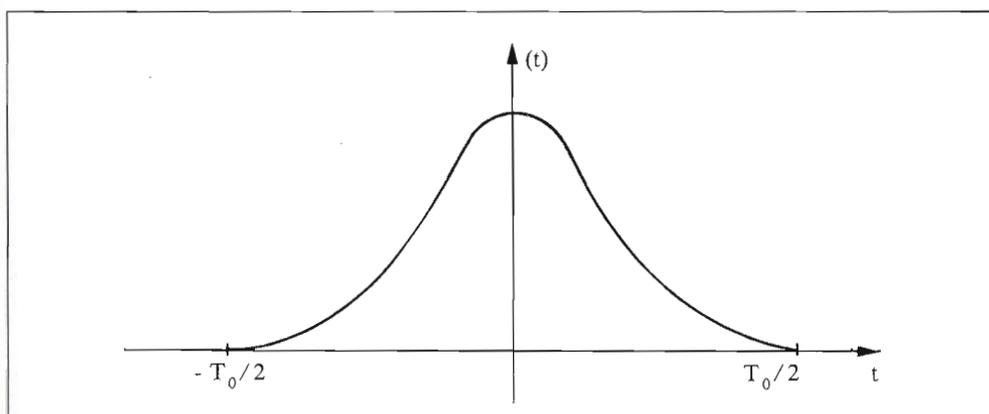


Fig. 5.12 Impulso aperiodico.

(dove $\omega_0 = 2\pi/T_0$), cioè supporre $s(t)$ periodico, di periodo T_0 .
 La (16*) coincide, in realtà, con la (10*) proprio perchè l'integrando è supposto periodico, di periodo T_0 .

Lo sviluppo di Fourier ci darà, allora, una serie di infinite copie del segnale originale, che si ripetono nel tempo con periodo T_0 .

D'altra parte T_0 è arbitrario; deve solo essere abbastanza grande da comprendere tutto il segnale originale. Possiamo, allora, farlo crescere indefinitamente, in modo che le copie periodiche del segnale originale si distanzino sempre di più e vadano - per così dire - "fuori vista".

Al limite per $T_0 \rightarrow \infty$, otteniamo una sola copia, cioè il segnale originale aperiodico: in altri termini un segnale aperiodico può essere pensato come un segnale periodico, di periodo infinito.

Cosa succede in questo limite allo spettro (16*) e alla serie di Fourier relativa? Al crescere di T_0 , le righe dello spettro, che sono intervallate di $\omega_0 = 2\pi/T_0$, si infittiscono.

Supponiamo, allora, di dividere lo spettro in intervalli di frequenza (angolare) $\delta\omega$ sufficientemente grandi da contenere ciascuno un gran numero di righe dello spettro stesso, ma anche sufficientemente piccoli da far sì che le componenti armoniche, in ciascuno di essi, siano di poco differenti tra loro.

Il compromesso è tanto più possibile, quanto più fitte sono le righe spettrali, cioè quanto più grande è T_0 . E', così, possibile "pesare" allo stesso modo nello sviluppo in serie le componenti in uno stesso $\delta\omega$.

In altri termini, se $\delta\omega$ è centrato intorno ad una riga di frequenza ω , e definiamo:

$$C(\omega) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) \exp(-j \omega t) dt$$

Il contributo della porzione $\delta\omega$ dello spettro sarà:

$$\begin{aligned} \delta s &= [C(\omega)/T_0] \exp(j\omega t) \cdot \delta\omega/\omega_0 = \\ &= [C(\omega)/(2\pi)] \exp(j\omega t) \cdot \delta\omega \end{aligned}$$

dove $\delta\omega/\omega_0$ è il numero di componenti armoniche in $\delta\omega$, tutte considerate uguali alla componente centrale $\exp(j\omega t)$ e con il suo stesso coefficiente $C(\omega)/T_0$, dato dalla solita formula (16*) con $k \cdot \omega_0$ uguale a ω .

Lo sviluppo assume, allora, la forma:

$$s_{T_0}(t) = [1/(2\pi)] \sum C(\omega) \cdot \exp(j\omega t) \cdot \delta\omega \quad (17^*)$$

dove la sommatoria è estesa ai $\delta\omega$ che ricoprono un asse convenzionale delle frequenze da $-\infty$ a $+\infty$ (o, almeno, da $-2\pi B$ a $+2\pi B$, essendo B la banda del segnale in **Hz**).

Al limite per $T_0 \rightarrow \infty$ e $\delta\omega \rightarrow 0$ la sommatoria (17*) diventa un integrale il cui valore tende ad $s(t)$:

$$s(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) \cdot d\omega \quad (18a^*)$$

con:

$$S(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-j\omega t) \cdot dt \quad (18b^*)$$

La $S(\omega)$ si dice *trasformata di Fourier* di $s(t)$; la formula (18a*) che ridà $s(t)$ in funzione di $S(\omega)$ è invece l'*antitrasformata*. Trasformata e antitrasformata di Fourier sono l'analogo per i segnali aperiodici rispettivamente della (10*) e della (9*).

La DFT è una approssimazione della Trasformata di Fourier (FT). In effetti, nel caso di segnali limitati in banda, i valori della DFT danno, come si è visto per i segnali periodici, i valori dei coefficienti dello sviluppo di Fourier (a meno di una costante). Nel caso di un segnale aperiodico, questi coefficienti rappresentano lo spettro della sua ripetizione periodica con periodo T_0 . Al crescere di T_0 le righe dello spettro si infittiscono, fino a dare il profilo della FT. Quindi i valori della DFT interpolano la curva della trasformata di Fourier, purchè sia soddisfatto il teorema di Shannon, cioè purchè la frequenza di campionamento $1/T = N/T_0$ sia maggiore del doppio della banda B . In altre termini:

$$N > 2BT_0 \quad (19^*)$$

Si potrebbe dimostrare che se la (19*) è verificata, con T_0 almeno pari alla durata del segnale aperiodico, non solo gli N valori della DFT sono iscritti nel profilo della FT, ma anzi la determinano completamente.

In effetti è ancora il teorema di Shannon ma in forma duale: per determinare lo spettro di un segnale limitato nel tempo è necessario e sufficiente campionarlo (lo spettro) con un passo B/N tale che N/B (la "frequenza" di una frequenza) sia maggiore del

doppio della durata T_0 del segnale stesso. Cioè, appunto, ancora la (19*).

La (19*) costituisce pertanto la "regola d'oro" per una buona analisi: essa determina il numero di punti su cui effettuare la DFT in base alla banda e alla durata *pratiche* del segnale.

Pratiche, perchè in realtà un segnale limitato nel tempo non può esserlo in frequenza e viceversa (è il cosiddetto *principio di indeterminazione*). Però appunto *in pratica* tutti i segnali di interesse reale lo sono, nel senso che si riducono ad essere trascurabili al di fuori di opportuni intervalli di tempo e di frequenza. In soldoni, si tratta di scegliere B e T_0 , e quindi N , abbastanza grandi da "prender dentro" presumibilmente tutto senza aumentare troppo i tempi di calcolo.

5.3.4 E per finire ... la FFT

Nel nostro programma la DFT è calcolata tramite un algoritmo noto come Trasformata Veloce di Fourier (Fast Fourier Transform - FFT).

A grandi linee, la FFT riduce il calcolo della DFT su N punti a quello di due DFT su $N/2$ punti, che a loro volta sono ridotte a due coppie di DFT su $N/4$ punti, e così via ricorsivamente.

Per chi non si accontenta, qui di seguito diamo una descrizione completa dell'algoritmo, dovuto (crediamo) a Rabiner e Gold [5] (ma vedi anche [6]):

Riprendiamo la definizione di DFT su N punti di un segnale $s(t)$. Per comodità di esposizione indichiamo con $s(i)$ i campioni del segnale (presi agli istanti $t = i \cdot T$, con T periodo di campionamento) e con $S(k)$ i valori della DFT (le **armoniche** del segnale):

$$S(k) = \sum_{i=0}^{N-1} s(i) \exp(-j \cdot 2\pi i k / N) \quad (20^*)$$

Se definiamo:

$$W_N = \exp(-j \cdot 2\pi / N) \quad (21^*)$$

la DFT diventa:

$$S(k) = \sum_{i=0}^{N-1} s(i) \cdot W_N^k \quad (22^*)$$

Se N è pari, possiamo suddividere la sommatoria in due sommatorie di $N/2$ termini ciascuna:

$$S(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_1(i) \cdot W_N^{2ik} + \sum_{i=0}^{N/2-1} s_2(i) \cdot W_N^{(2i+1)k}$$

dove con $s_1(i) \equiv s(2i)$ abbiamo indicato i campioni di ordine pari e con $s_2(i) \equiv s(2i+1)$ quelli di ordine dispari del segnale.

D'altra parte:

$$W_N^2 = \exp(-j \cdot 2 \cdot 2\pi/N) = \exp[-j \cdot 2\pi/(N/2)] = W_{N/2}$$

per cui:

$$S(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s_1(i) \cdot W_{N/2}^{ik} + W_N^k \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} s_2(i) \cdot W_{N/2}^{ik}$$

Le due sommatorie sono DFT su $N/2$ punti, rispettivamente della successione dei campioni pari e della successione dei campioni dispari. In notazione piú compatta:

$$S(k) = S_1(k) + W_N^k \cdot S_2(k) \quad (23^*)$$

dove $S_1(k)$ è la DFT sugli $N/2$ punti $s_1(i)$ e $S_2(k)$ quella sugli $N/2$ punti $s_2(i)$.

In questo modo il calcolo della DFT su N punti è ricondotta al calcolo di due DFT su $N/2$ punti.

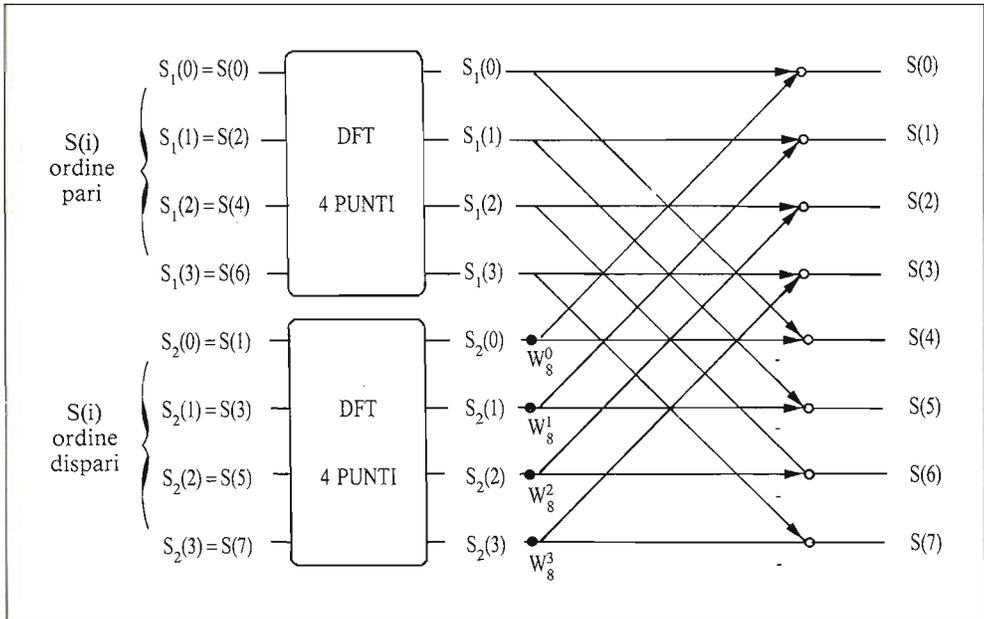


Fig. 5.13 DFT su 8 punti.

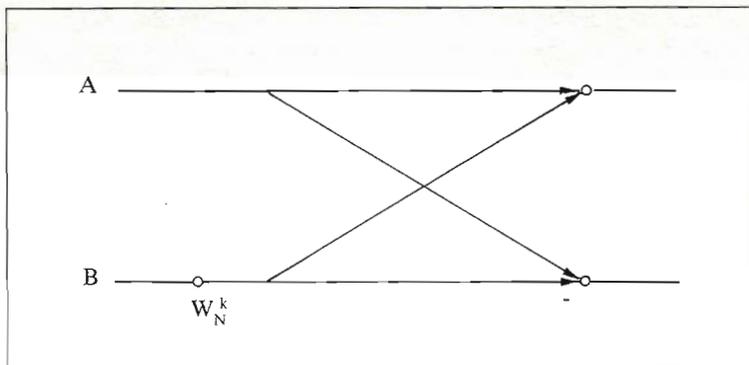


Fig. 5.14 La struttura "a farfalla".

C'è però da notare che, normalmente, $S(k)$ è definita per $k=0,1,\dots,N-1$, mentre $S_1(k)$ e $S_2(k)$ lo sono per $k=0,1,\dots,N/2-1$.

Per estendere la (23*) alle componenti di $S(k)$ di ordine superiore a $N/2-1$, teniamo presente che (v. sopra) una DFT su $N/2$ punti è periodica di periodo $N/2$ e che inoltre:

$$\begin{aligned} W_N^{k+N/2} &= \exp[-j2\pi(k+N/2)/N] = \exp(-j\pi-j2\pi k/N) = \\ &= [\exp(-j\pi)] \cdot [\exp(-j2\pi k/N)] = -W_N^k \end{aligned}$$

Con il che la (23*) si completa in:

$$\begin{aligned} S(k) &= S_1(k) + W_N^k S_2(k) \\ S(k+N/2) &= S_1(k) - W_N^k S_2(k) \end{aligned} \quad k=0,1,\dots,N/2-1 \quad (24^*)$$

Per fissare le idee, poniamo $N=8$. Lo schema di calcolo della DFT su 8 punti dalle due DFT su 4 punti può essere allora rappresentato graficamente come in Fig. 5.13 dove la struttura "a farfalla" (v. Fig. 5.14) rappresenta le operazioni (v. Fig. 5.15).

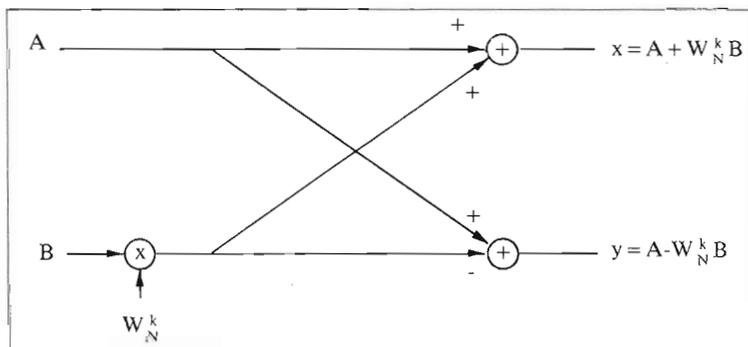


Fig. 5.15 Le operazioni della "farfalla".

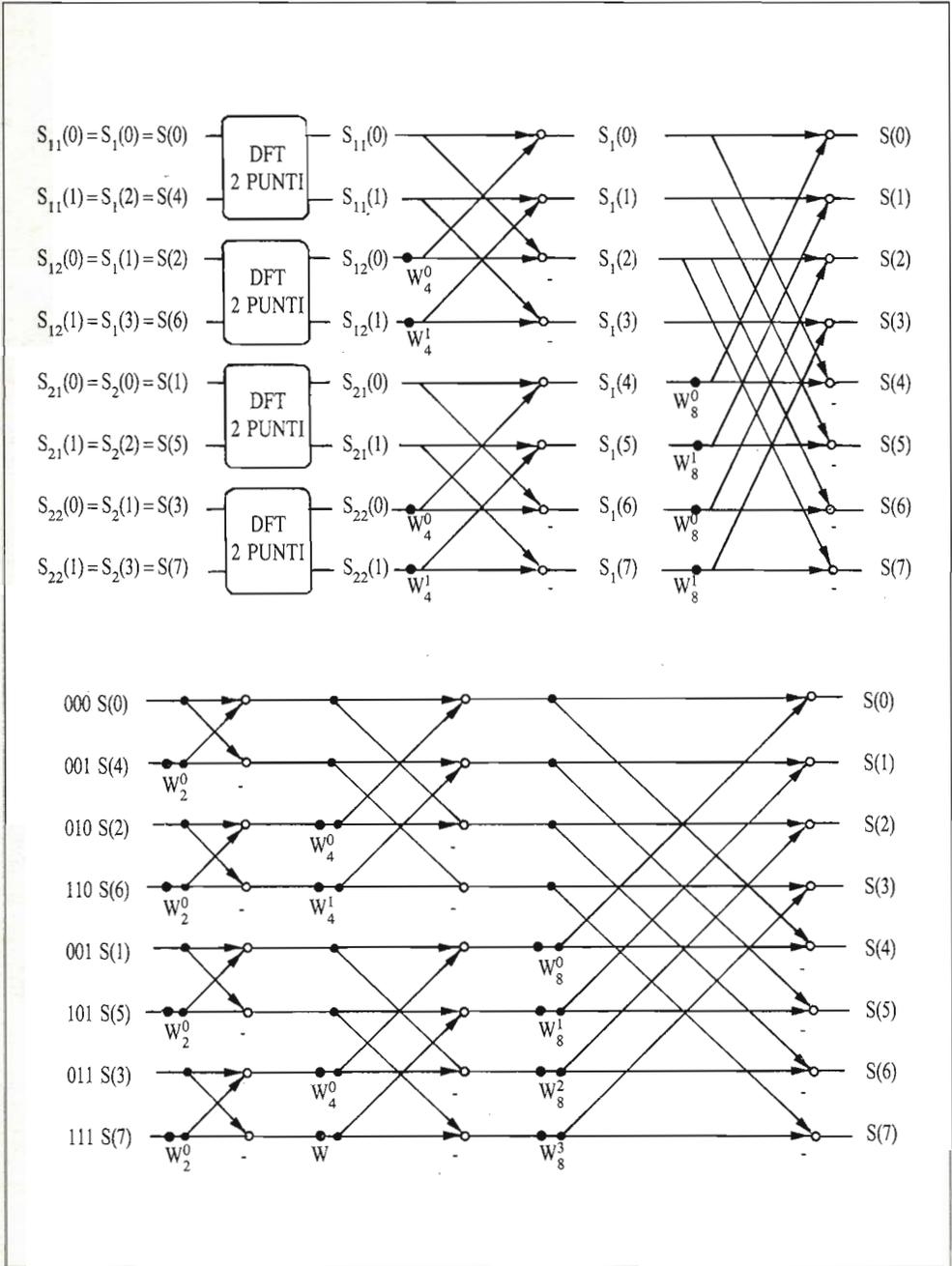


Fig. 5.16 a) DFT su 8 punti; penultima fase di scomposizione.
 b) scomposizione finale e riordinamento dei dati di ingresso.

Se N è una potenza di 2 (come nel nostro esempio) la scomposizione può essere via via ripetuta, fino ad arrivare alle DFT su 2 punti.

Il calcolo viene ulteriormente semplificato, perchè, come è immediato dimostrare, $W_{N/2} = W_N^2$ per cui tutti i coefficienti W che compaiono nelle "farfalle" sono tutti potenze di W_N .

Lo schema completo per la DFT su 8 punti diventa allora quello illustrato in Fig. 5.16.

Avrete notato che i dati $s(i)$ in ingresso alle "farfalle" sono "scombinati" rispetto al loro ordine originale.

Proviamo a seguire con pazienza la sorte del dato i -esimo attraverso le scomposizioni successive della DFT in DFT di ordine inferiore:

se i è pari (resto della sua divisione per 2 uguale a 0), $s(i)$ va nella DFT di ordine $N/2$ che sta "sopra" nello schema; se i è dispari (resto della divisione per 2 uguale a 1) va "sotto".

In questa nuova DFT, $s(i)$ assume l'indice $i' = i \setminus 2$ (\setminus è la divisione intera). Nella successiva scomposizione delle DFT di ordine $N/2$ in DFT di ordine $N/4$, il nostro dato va "sopra" se i' è pari, "sotto" se i' è dispari. E così via.

Quindi a partire dall'alto $s(i)$ va a finire in una posizione determinata dalla successione di resti della catena di divisioni (intere) applicata ad i : il primo resto "sceglie" la metà in cui sta $s(i)$, il secondo il quarto all'interno della metà, il terzo l'ottavo all'interno del quarto, ecc.

Un attimo di riflessione, e vi convincerete che la posizione di arrivo è data dal numero di cui la successione di resti (0 e 1) costituisce l'equivalente binario (voi state usando un calcolatore, quindi dovete sapere di cosa si tratta, se no peggio per voi).

D'altra parte, i resti delle successive divisioni per 2, *letti però in ordine inverso*, dall'ultimo resto al primo, costituiscono la codifica binaria di i (questo algoritmo di conversione Decimale \rightarrow Binario è di solito uno dei primi programmini che un neofita incontra nei testi di introduzione alla programmazione).

Per trovare il nuovo indice (la posizione) di un dato, bisogna quindi prenderne l'indice originale, convertirlo in binario, invertire l'ordine dei bit, e riconvertirlo in decimale.

Se tutto ciò vi sembra una complicazione opinabile, tenete presente che il calcolo diretto di una DFT di ordine N direttamente dalla sua formula di definizione (22*) richiede N moltiplicazioni

in campo complesso per ognuna delle N componenti (e N addizioni, ma queste portano via un tempo-macchina di un ordine di grandezza sostanzialmente inferiore). In tutto quindi N^2 moltiplicazioni.

Invece l'algoritmo della FFT suddivide il calcolo in $\log_2 N$ stadi, e ciascun stadio richiede $N/2$ "farfalle", ciascuna con una sola moltiplicazione (v. figura). Quindi in tutto $(N/2)\log_2 N$ moltiplicazioni, il che è un risparmio essenziale: ad esempio, nel programma FFT di questo libro al massimo è $N = 256$, il che vuol dire con l'algoritmo "naturale" $256^2 = 65536$ moltiplicazioni, ma solo $128 \cdot \log_2 256 = 128 \cdot 8 = 1024$ con la FFT.

In Basic la differenza è sostanziale, ma lo diventa rapidamente anche in altri linguaggi molto più veloci, al crescere di N . L'unica limitazione, di solito poco importante, della FFT è che N deve essere una potenza di 2, per poter effettuare la decomposizione in farfalle elementari.

La FFT ha assunto nei tempi recenti una importanza notevole, specie per quanto riguarda l'analisi e il riconoscimento numerico di segnali, tanto è vero che numerosi analizzatori di spettro usano oggi, in luogo di filtri realizzati via hardware, processi software basati appunto su tale algoritmo.

Da qualche anno sono anche in produzione microprocessori dedicati (i cosiddetti DSP - Digital Signal Processors) dotati di istruzioni che ne rendono particolarmente semplice l'implementazione [6].

Nota al listato

Nel nostro programma i coefficienti W_N^K vengono calcolati una volta per tutte in fase di inizializzazione alle linee 420 - 460 per $2 \leq N \leq 256$ e $0 \leq K \leq N/2-1$ (in realtà nel programma non compare N ma $Z = N/2$).

L'algoritmo FFT è alle linee 680 - 790. Le linee 750,760 costituiscono la "farfalla" (24*, con G in luogo di N e J in luogo di K).

Il riordino dei campioni è ripetuto in varie routines di ingresso dati, ad esempio alle linee 1480 - 1530 per i dati introdotti graficamente.

5.4 BIBLIOGRAFIA

- [1] M.R.Spiegel, *Analisi di Fourier*, ETAS Libri, Milano 1976
- [2] E.T.Whittaker & G.N.Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cap. IX, Cambridge University Press, New York 1965

- [3] G.Fano, *Metodi matematici della meccanica quantistica*, Cap. V, Zanichelli, Bologna 1967
- [4] E.Biglieri, S.Benedetto, *Teoria dei segnali determinati*, Quaderni di Elettronica 1, Boringhieri, Torino 1977
- [5] L.R.Rabiner & B.Gold, *Theory and Applications of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J., 1975
- [6] M.Malcangi, *Elaborazione digitale dei segnali. Teoria e pratica*, Jackson, Milano 1986