Verso le funzioni goniometriche

Luigi Togliani

“Della luce e del suono”

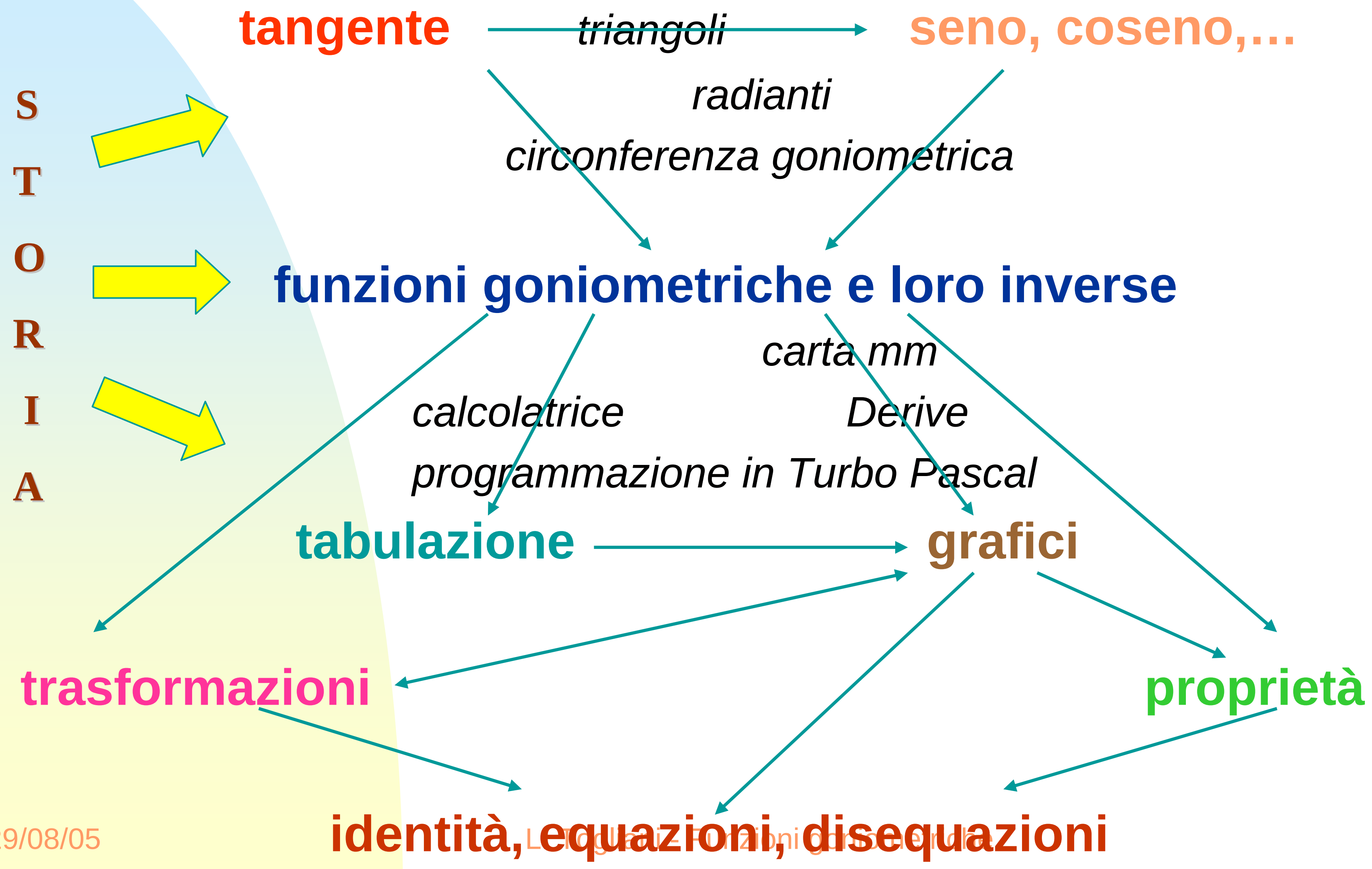
Corso residenziale di formazione avanzata per docenti delle scuole secondarie di 2° grado

Idro, 29 agosto - 3 settembre 2005

Perché le funzioni goniometriche?

- Collegamenti con l'**astronomia**
- Problemi di **topografia**, di **agrimensura** e di **navigazione**
- Studio del **moto armonico**
- Studio di: **onde elastiche**, **acustica**, **ottica**, **elettromagnetismo**
- Fisica **atomica** e **quantistica**
- Studio di **fenomeni periodici** di varia natura…..

Mappa


tangente
triangoli
seno, coseno,…
radianti
circonferenza goniometrica
S
T
O
R
I
A
funzioni goniometriche e loro inverse
carta mm
calcolatrice
Derive
programmazione in Turbo Pascal
tabulazione
grafici
trasformazioni
proprietà
identità, equazioni, disequazioni

Destinatari

- Alunni di seconda liceo (definizioni)
- Alunni di terza o quarta liceo (funzioni)

Pre-requisiti: contenuti

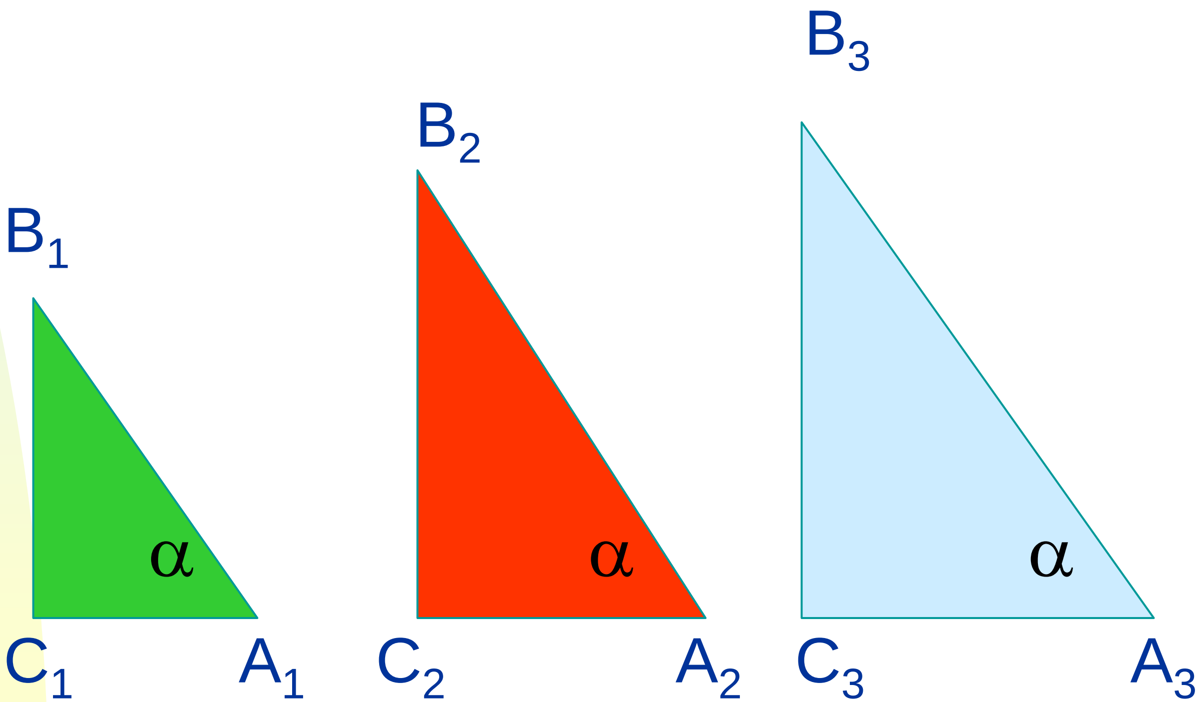
- Geometria sintetica: similitudini, ampiezze, misure
- Funzioni, geometria analitica, grafici
- Algebra di 1° e 2° grado
- Trasformazioni geometriche
- Concetto di limite
- Elementi di un linguaggio di programmazione

Pre-requisiti: abilità

- Uso del goniometro e della calcolatrice tascabile
- Costruire una tabella
- Tracciare grafici per punti nel piano cartesiano
- Saper risolvere equazioni e disequazioni algebriche
- Applicare le trasformazioni geometriche
- Gestire le operazioni preliminari per l'uso di sw applicativo al PC
- Saper scrivere e utilizzare un programma

Triangoli rettangoli simili: la tangente

Assegnato il rapporto tra i cateti (tangente) determinare la misura dell'angolo α

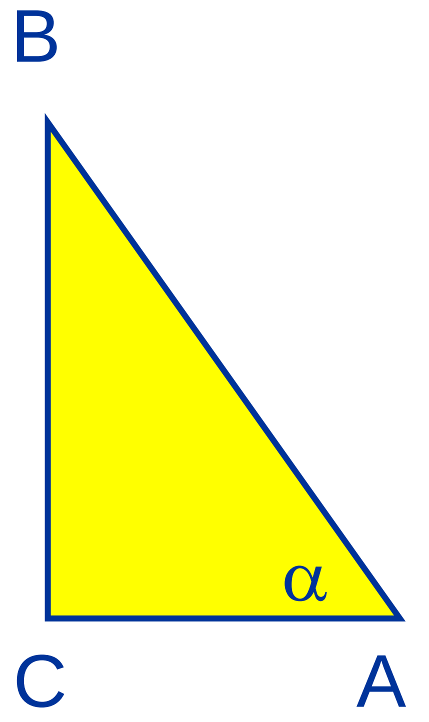


Triangoli rettangoli simili: rapporti tra lati

Assegnato l'angolo α:

- misurare rapporti di lati
- costruire tabella dati

α (°)	$\overline{BC}/\overline{AC}$	$\overline{BC}/\overline{AB}$	$\overline{AC}/\overline{AB}$
0			
10			
20			



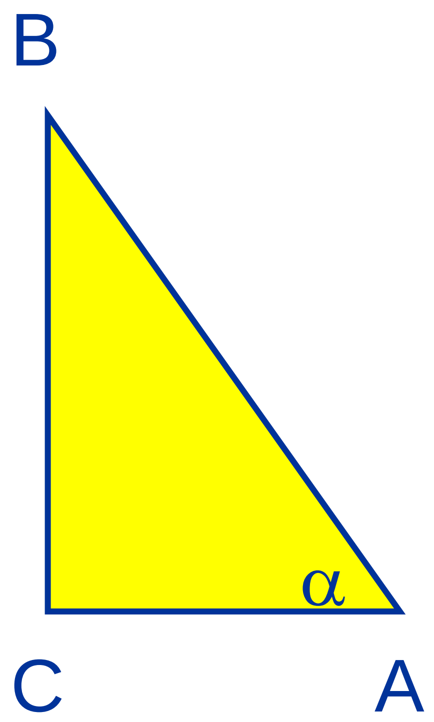
Funzioni goniometriche in un triangolo rettangolo

Dalla tangente al seno, al coseno, ...

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \qquad \sec\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



L'angolo retto e oltre

Può essere:

- α angolo retto ?
- α > angolo retto?
- α < angolo nullo?

Come definire in questi casi le funzioni goniometriche?

Dai triangoli rettangoli alla circonferenza goniometrica

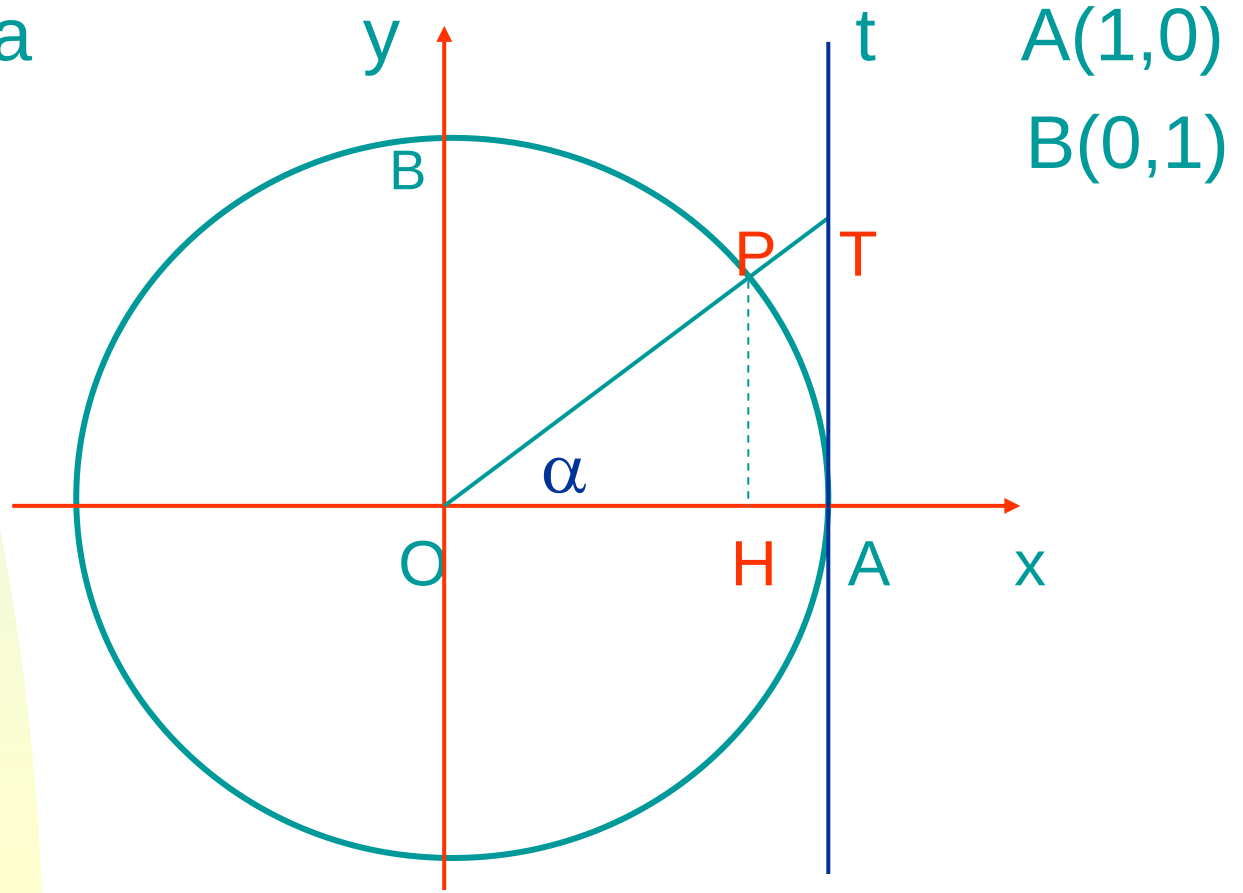
Circonferenza goniometrica

$\text{sen}\alpha = y_P$

$\cos\alpha = x_P$

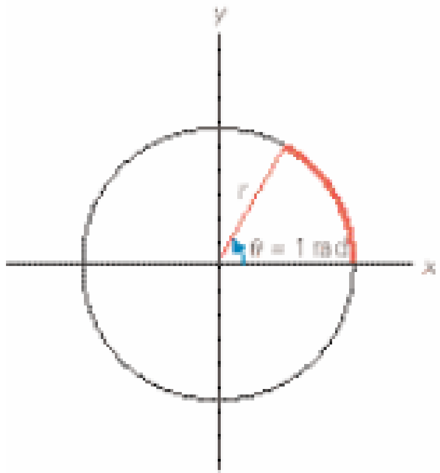
$\text{tg}\alpha = y_T$

.....



Uso dei radianti

- definizione di radiante



- relazione radianti/gradi sessadecimali

  x misura in radianti , y misura in gradi sess.

$$x : \pi = y : 180$$

- gradi sessadecimali o sessagesimali?

Perché i radianti ?

- **passaggio dall'angolo alla sua misura**

angolo $\longrightarrow$ ampiezza $\longrightarrow$ misura

$$k\hat{P} \quad \to \quad \left|k\hat{P}\right| \quad \to \quad k\pi$$

- **passaggio dall'angolo all'arco**

misura angolo x $\longrightarrow$ misura arco x·r

- **monometricità del sistema di riferimento**
- **semplicità del limite fondamentale e sue applicazioni (regole di derivazione)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1 \quad (x\ in\ radianti) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\frac{\pi}{180} \quad (x\ in\ gradi)$$

Tabulare le funzioni goniometriche

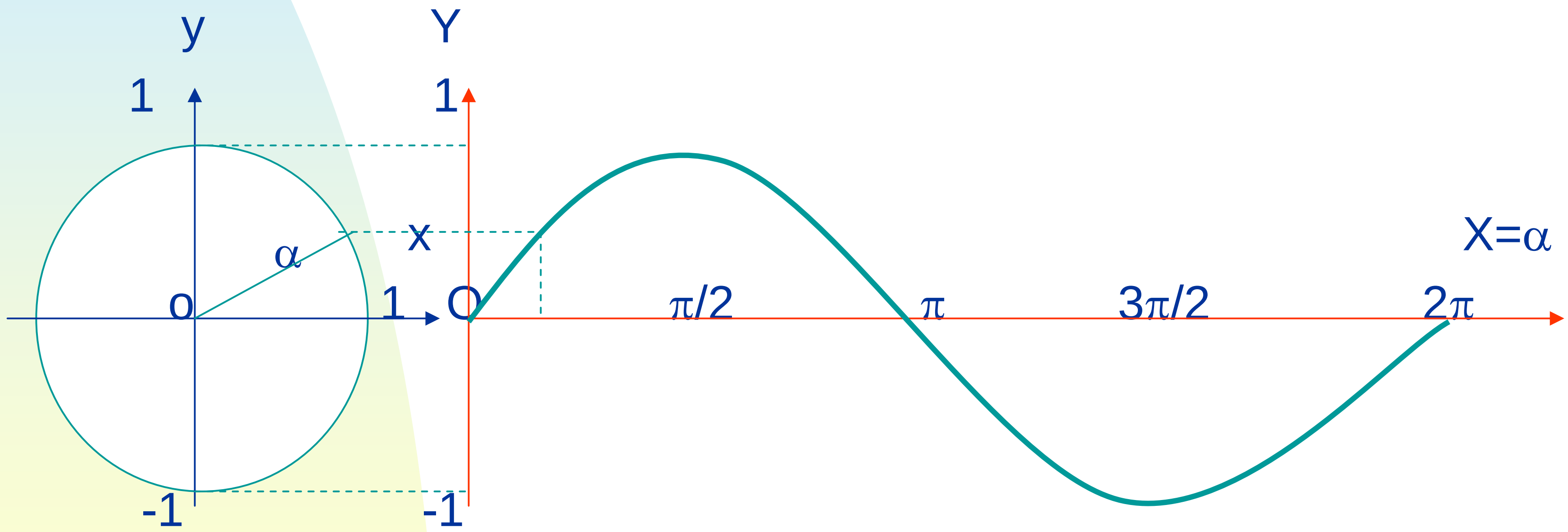
- **leggendo sulla carta millimetrata con la circonferenza goniometrica**
- **con la calcolatrice scientifica tascabile**

α (°)	senα	cosα	tgα	α (rad)
-10				$-\pi/18$
0				0
10				$\pi/18$
20				$\pi/9$

……………

Costruzione sinusoide

Costruzione della **sinusoide** per punti (uso della carta millimetrata) : Y = senα = senX



sen(x+2π) = sen x

traslazione di 2π

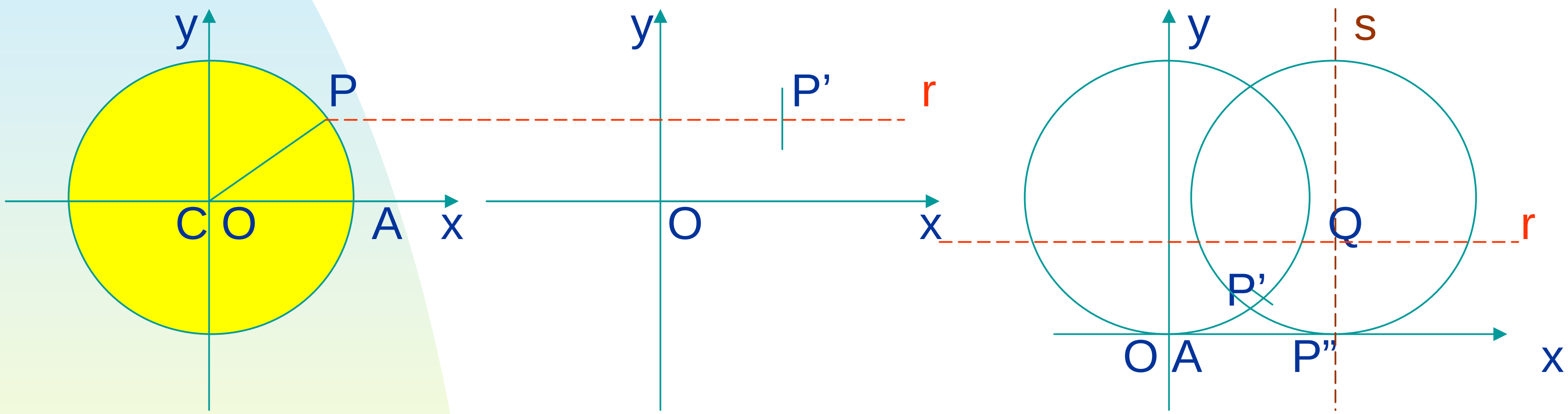
$$\begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = y \end{cases}$$

periodicità di 2π

Altro modo per costruire la sinusoide

a) dischetto di cartoncino: centro forato C e raggio unitario (es. CA = 4 cm)

b) sovrapporre C con O origine del piano xOy e scegliere punto P sulla crf



c) segnare la traccia P' di P sul piano xOy e mandare r || asse x per P'

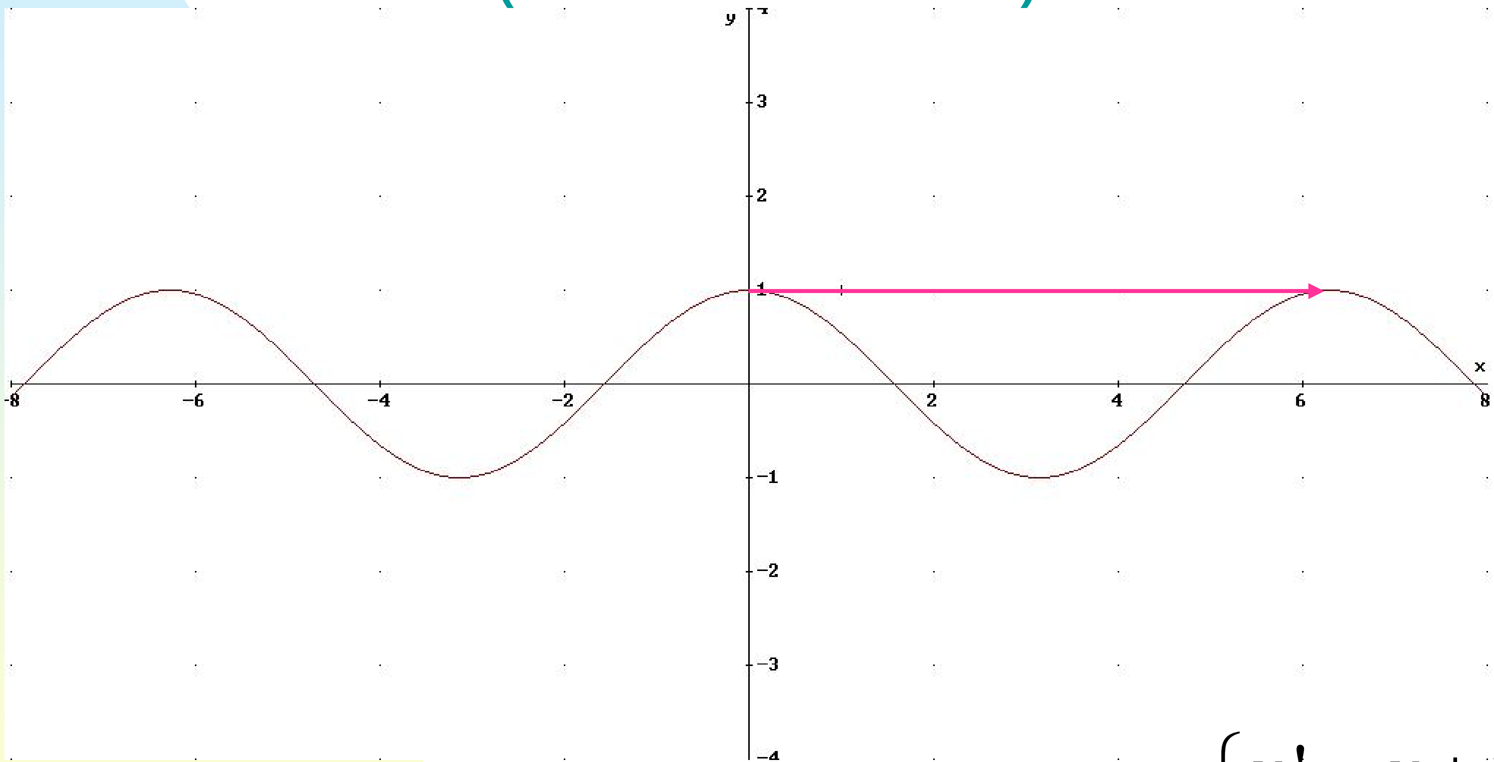
d) porre il dischetto con A≡O e C sull'asse y

e) far rotolare il dischetto sull'asse x finché P' finisce in P" sull'asse x

f) da P" mandare s || asse y ; {Q}=r∩s ; Q ∈ sinusoide

Altri grafici di funzioni goniometriche

Cosinusoide (uso di DERIVE)



cos(x+2π) = cos x

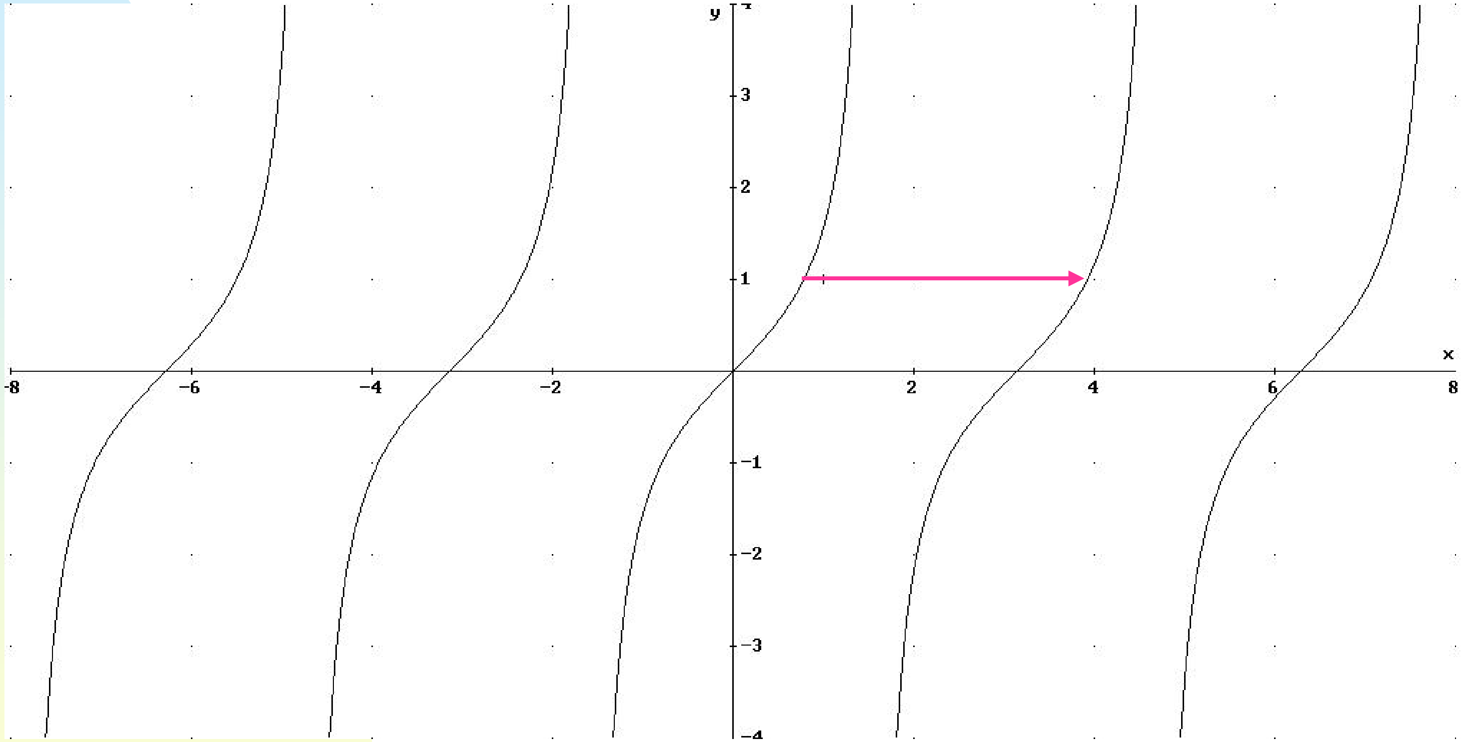
periodicità di 2π

traslazione di 2π

$$\begin{cases} x' = x + 2\pi \\ y' = y \end{cases}$$

Altri grafici di funzioni goniometriche

Tangentoide (uso di DERIVE)



tg(x+π) = tg x

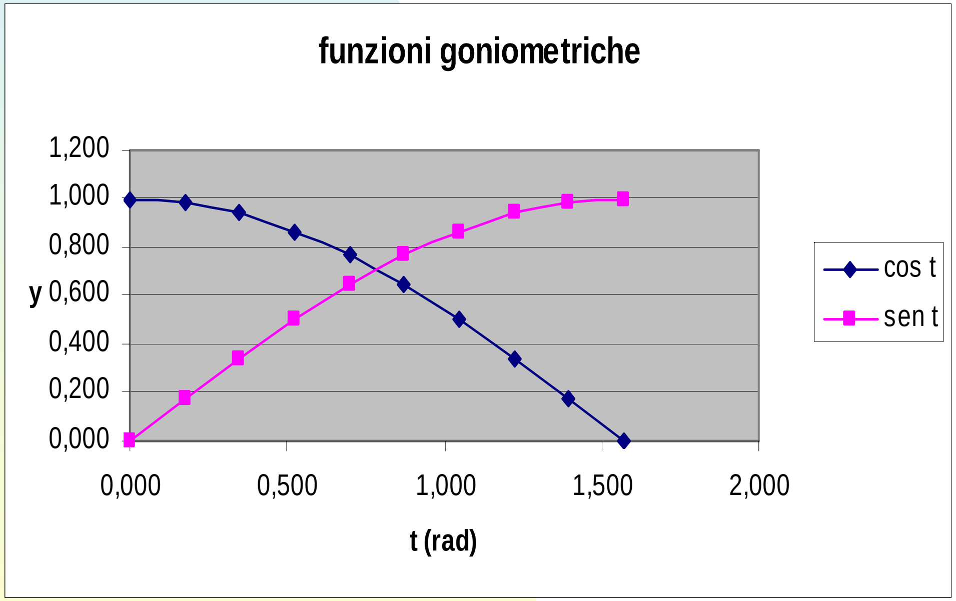
periodicità di π

traslazione di π

$$\begin{cases} x' = x + \pi \\ y' = y \end{cases}$$

Automatizzare le procedure

Uso di Excel



t (°)	t (rad)	cos t	sen t
0	0,000	1,000	0,000
10	0,175	0,985	0,174
20	0,349	0,940	0,342
30	0,524	0,866	0,500
40	0,698	0,766	0,643
50	0,873	0,643	0,766
60	1,047	0,500	0,866
70	1,222	0,342	0,940
80	1,396	0,174	0,985
90	1,571	0,000	1,000

Automatizzare le procedure

Tabulazione delle funzioni goniometriche

con l'uso di uno **struttogramma**

x max ← π / 2	
x ← 0	
passo ← 0.1	
ripeti	
	scrivi (x , sen x)
	x ← x + passo
finché x > x max	

Automatizzare le procedure

Struttogramma

- x max ← π / 2
- x ← 0
- passo ← 0.1
- ripeti
  - scrivi (x, senx)
  - x ← x + passo
- finché x > xmax

*Codifica in **Turbo Pascal 3***

```
program  tabulazione_seno;
var          xmax, x, passo : real ;
begin
        clrscr;
        xmax := pi/2 ;
        x := 0 ;
      passo := 0.1 ;
        repeat
                writeln(x:4:2,'  ',sin(x):4:2);
                x := x + passo
        until  x > xmax
end.
```

Automatizzare le procedure

TRACCIARE LA SINUSOIDE : codifica in TP3

```
program   GRAFICO_SINUSOIDALE;
const     k=1.8;            ← fattore di scala per lo schermo
var       x:integer; y,y1:real;
begin           modo grafico 640x200              disegna assi
          hires;
          draw(0,0,0,199,1); draw(0,100,639,100,1);
          x:=0;
          repeat                        ampiezza 50  frequenza 1/50
                y:=50*sin(x/50/k);
                x:=x+1;
                y1:=-y+100;     ← asse x al centro schermo
                plot(x,round(y1),1)  ← disegna il punto
          until x>=639
end.
```

Relazioni tra le funzioni goniometriche

IDENTITA' GONIOMETRICHE

- seno e coseno

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

- tangente, cotangente, seno e coseno

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

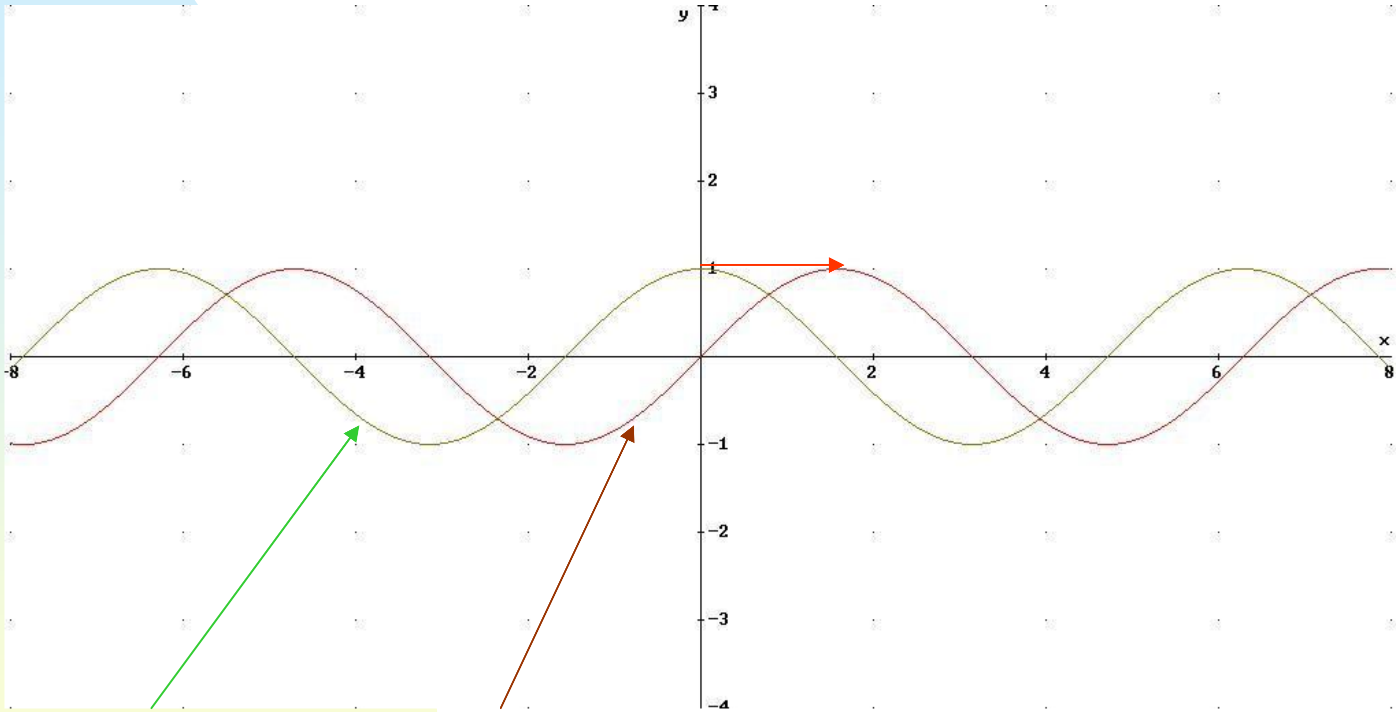
…………

approccio euristico: calcolatrice tascabile

dimostrazioni: teorema di Pitagora e circonferenza goniometrica

Relazioni tra le funzioni goniometriche

TRASLAZIONE DI GRAFICI (uso di DERIVE)



y = cos x

y = sen x

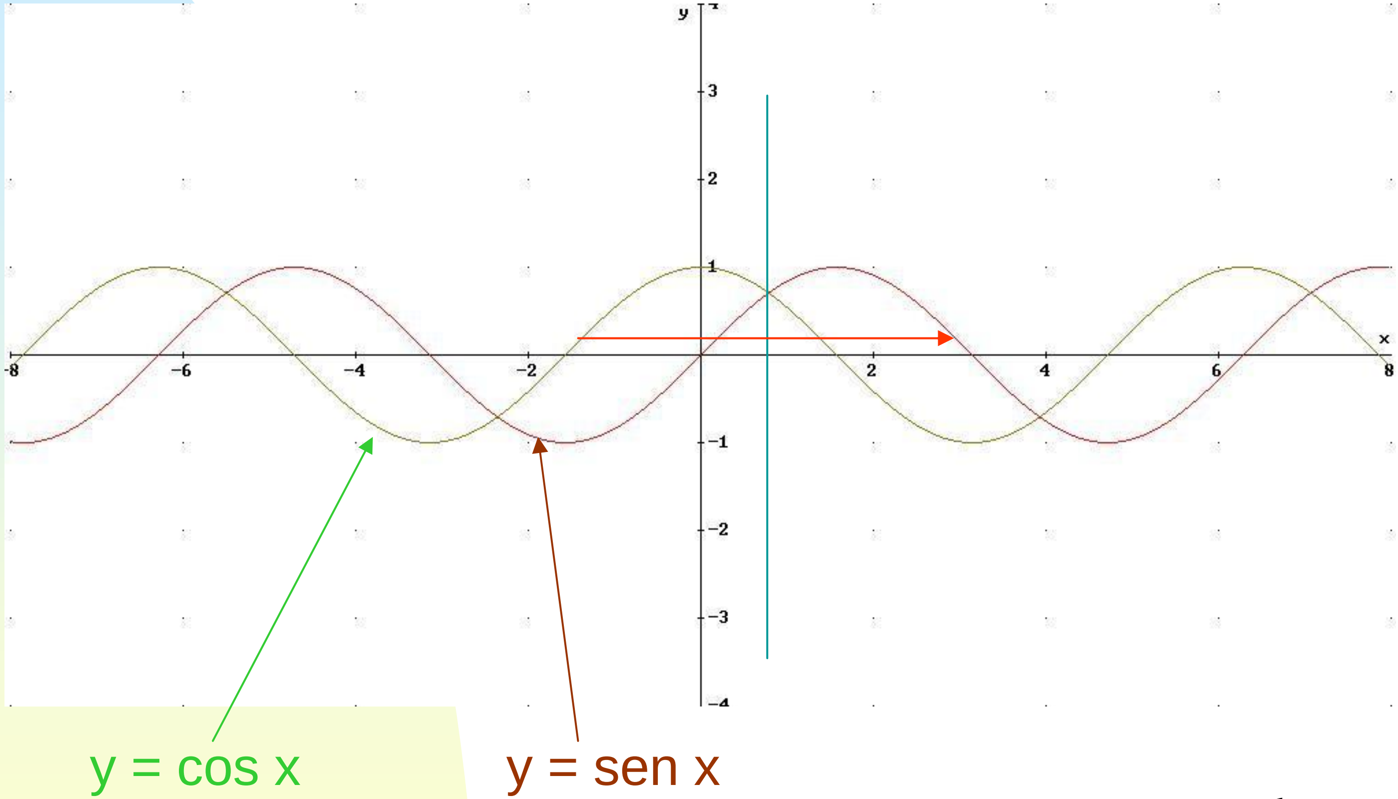
y = cos (x – π/2) = sen x

traslazione

$$\tau \begin{cases} x' = x + \pi/2 \\ y' = y \end{cases}$$

Relazioni tra le funzioni goniometriche

SIMMETRIE DI GRAFICI: seno e coseno



cos(π/2-x) = sen x

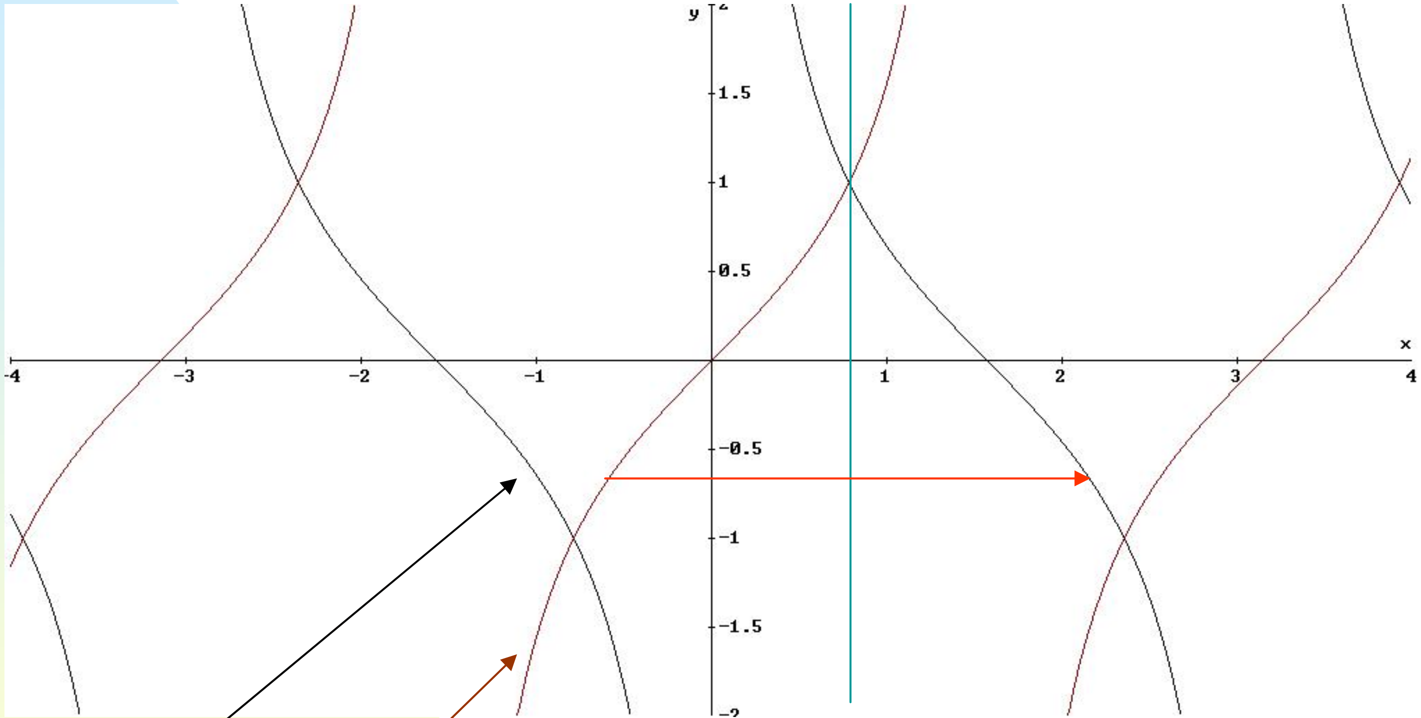
simmetria con

asse: x= π/4

$$\sigma \begin{cases} x' = -x + \pi/2 \\ y' = y \end{cases}$$

Relazioni tra le funzioni goniometriche

SIMMETRIE DI GRAFICI: tangente e cotangente



y = cotg x y = tg x

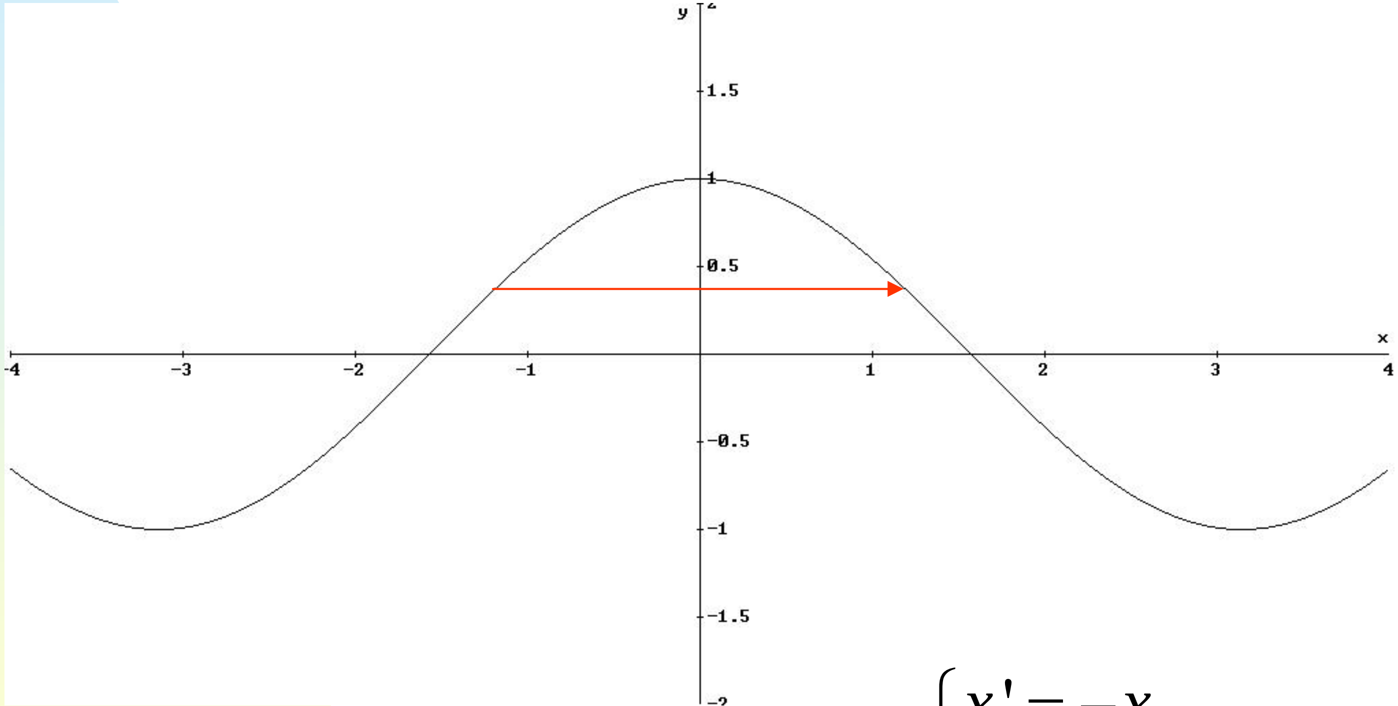
cotg(π/2-x) = tg x

simmetria con asse: x= π/4

$$\sigma \begin{cases} x' = -x + \pi/2 \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetrie dei grafici

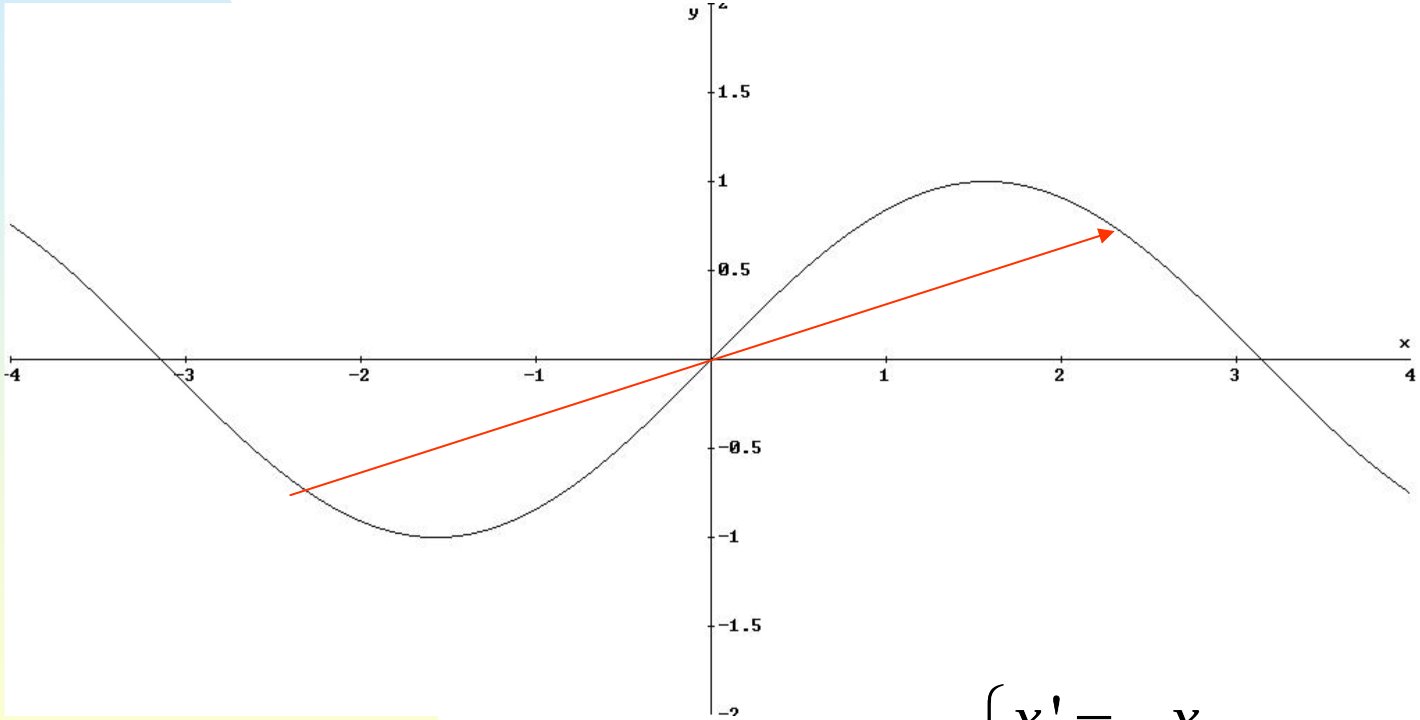
parità del coseno (simmetria rispetto all'asse y)



cos(-x) = cos x   simmetria $\sigma \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

Simmetrie dei grafici

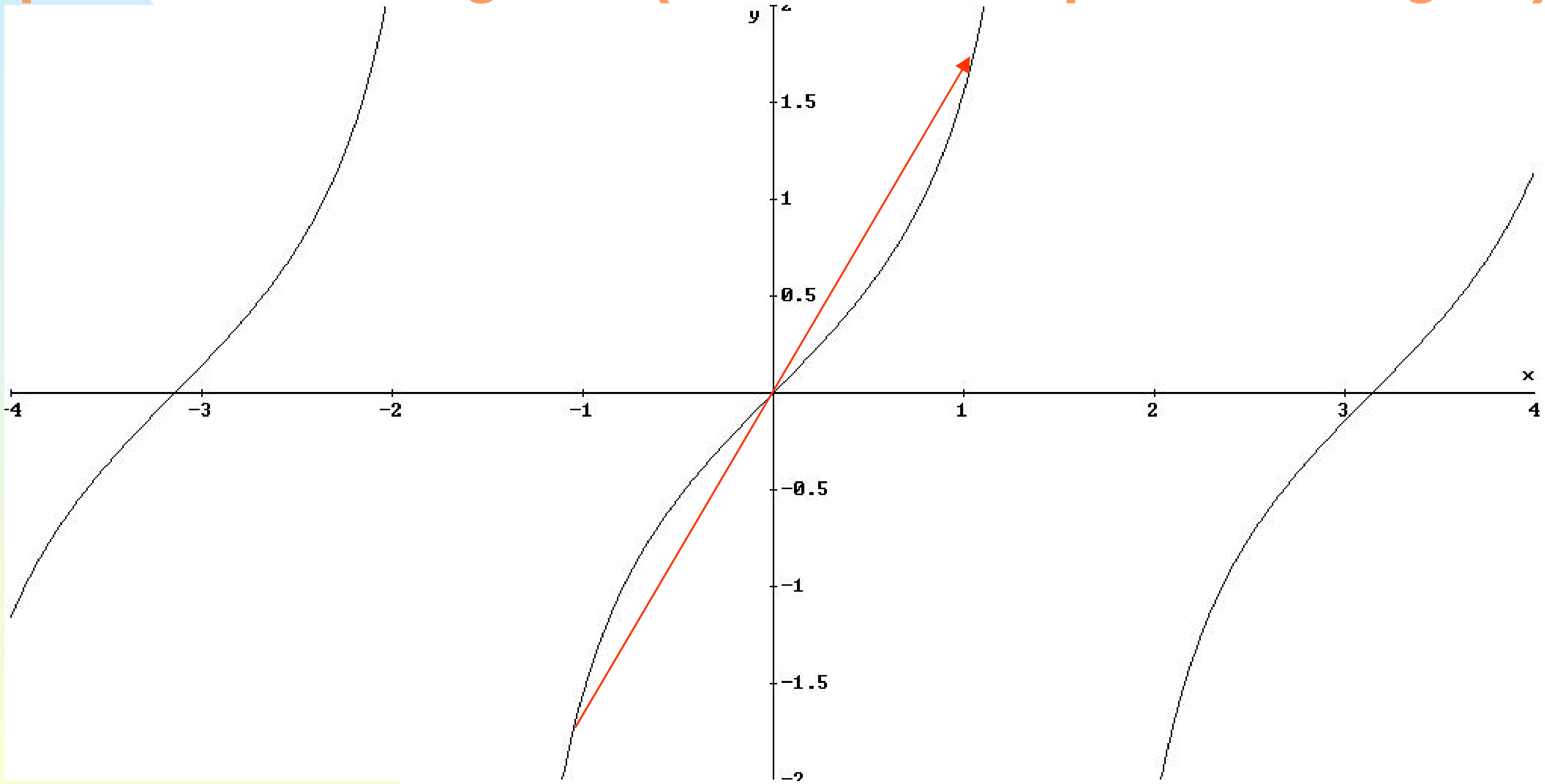
disparità del seno (simmetria rispetto all'origine)



sen(-x) = - sen x simmetria $\sigma \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Simmetrie dei grafici

disparità della tangente (simmetria rispetto all'origine)

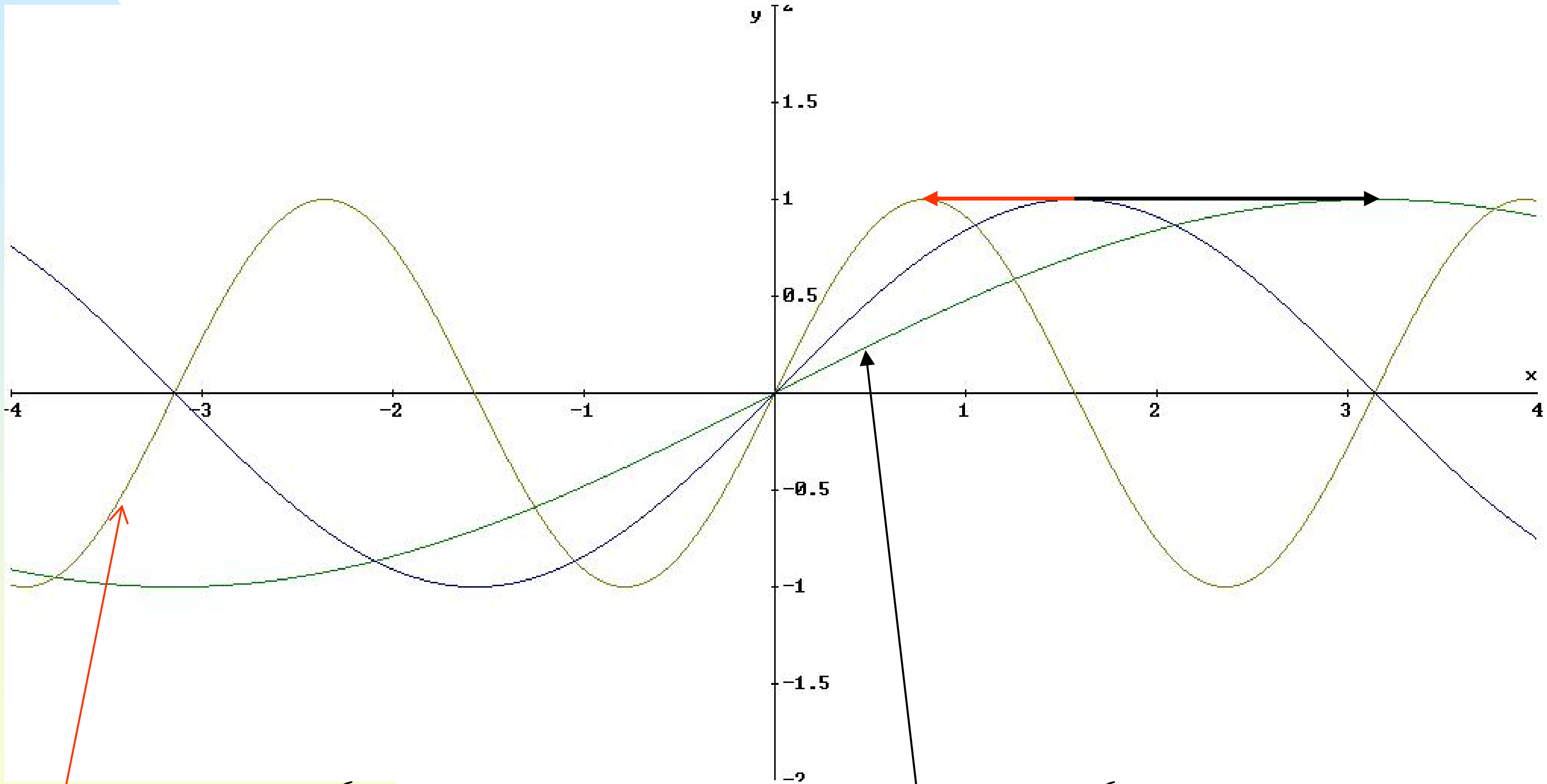


tg(-x) = - tg x

simmetria $\sigma \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Dilatazioni di grafici

dilatazioni lungo l'asse x della sinusoide

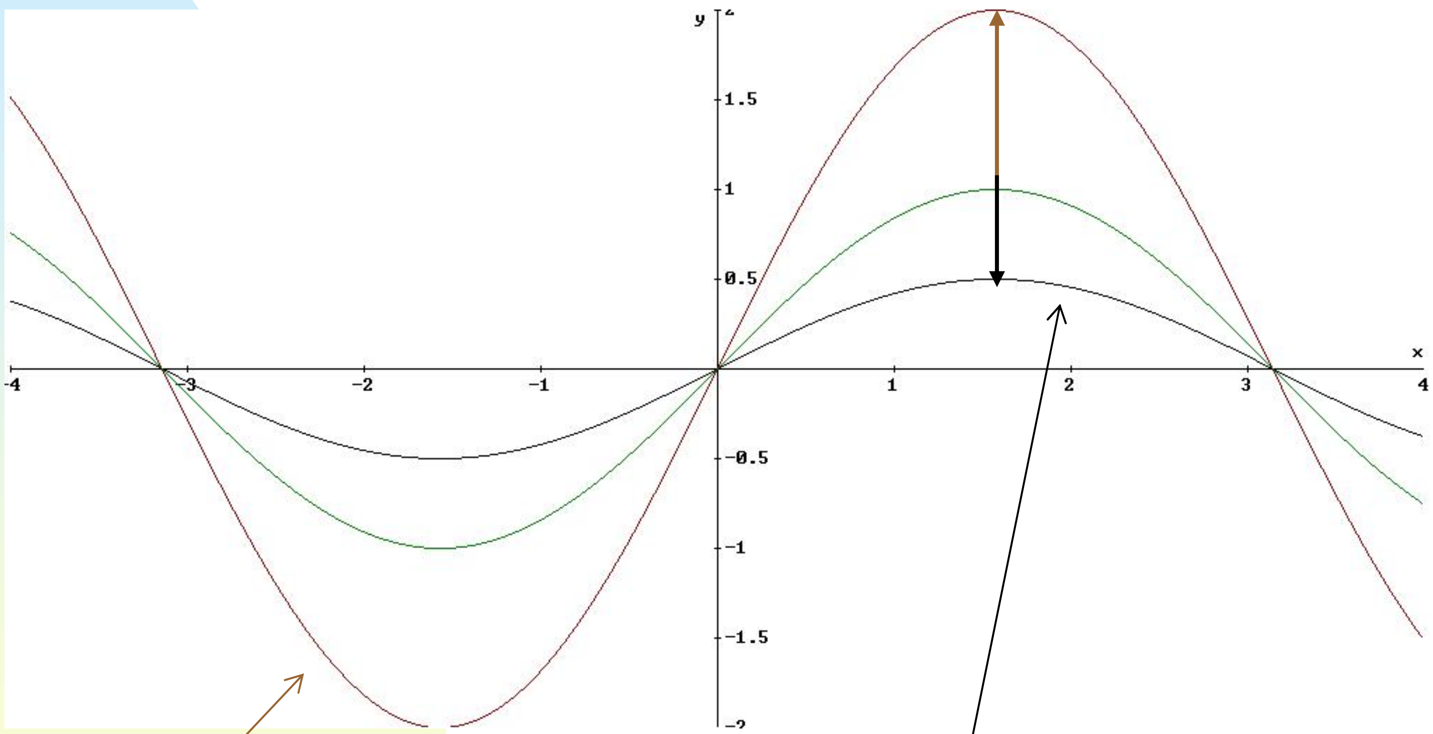


y=sen(2x) $\begin{cases} x' = x/2 \\ y' = y \end{cases}$

y=sen(x/2) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$

Dilatazioni di grafici

dilatazioni lungo l'asse y della sinusoide



y=2sen x

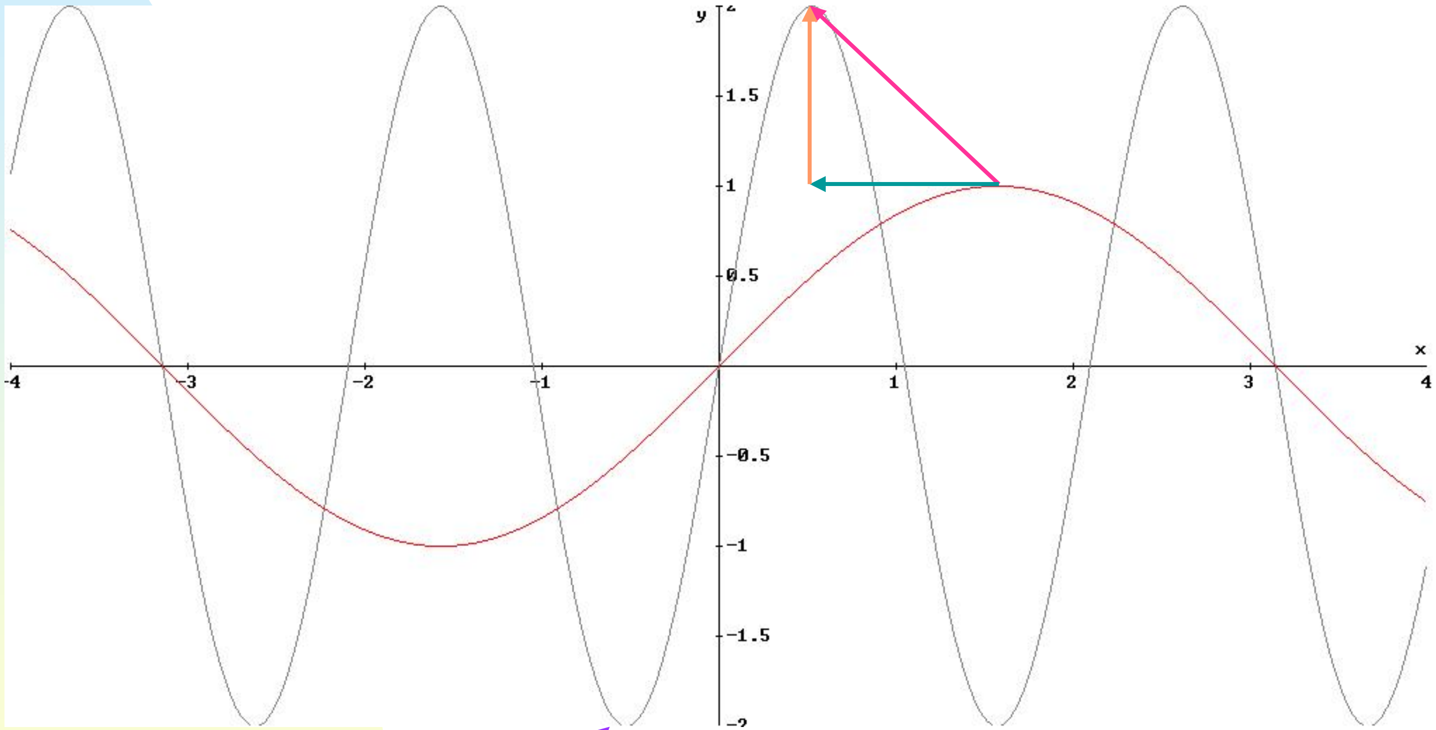
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$$

y=1/2 sen x

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y/2 \end{cases}$$

Dilatazioni di grafici

dilatazioni lungo entrambi gli assi di y = senx

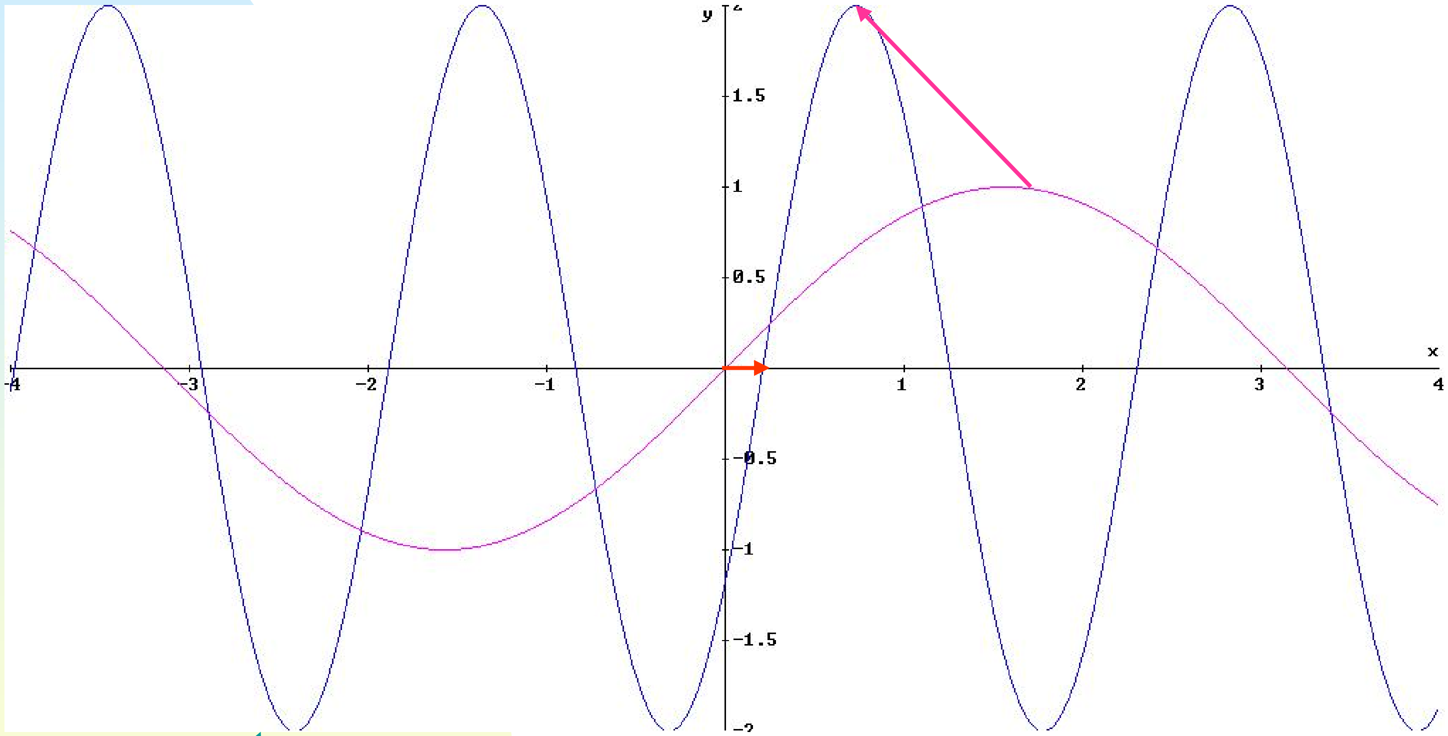


y = 2sen(3x)

affinità $\begin{cases} x' = x/3 \\ y' = 2y \end{cases}$

Dilatazioni e traslazioni di grafici

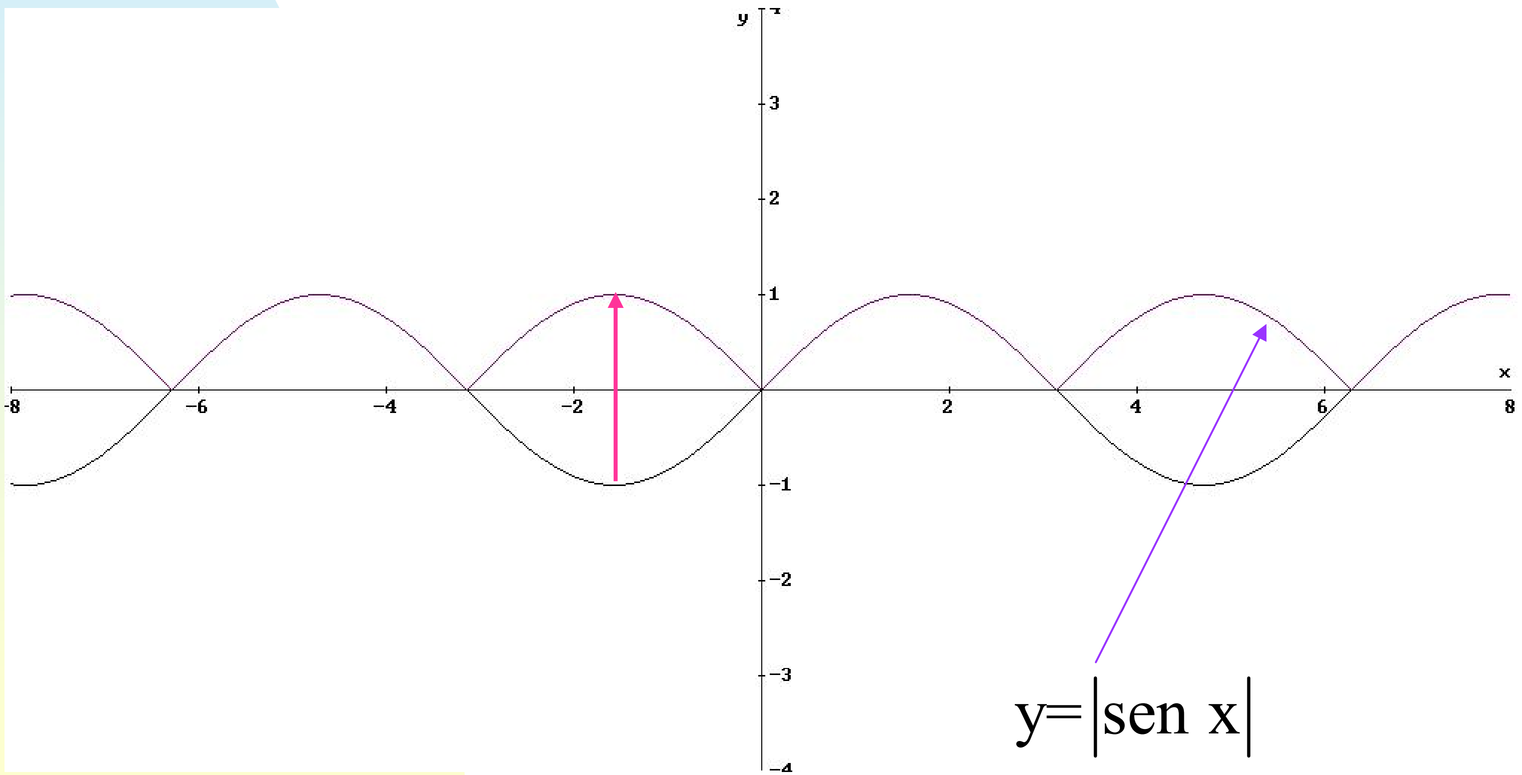
dilatazioni e traslazioni della sinusoide



y = 2sen(3x - π/5) affinità $\begin{cases} x' = x/3 \\ y' = 2y \end{cases}$ traslazione $\begin{cases} x' = x + \pi/15 \\ y' = y \end{cases}$

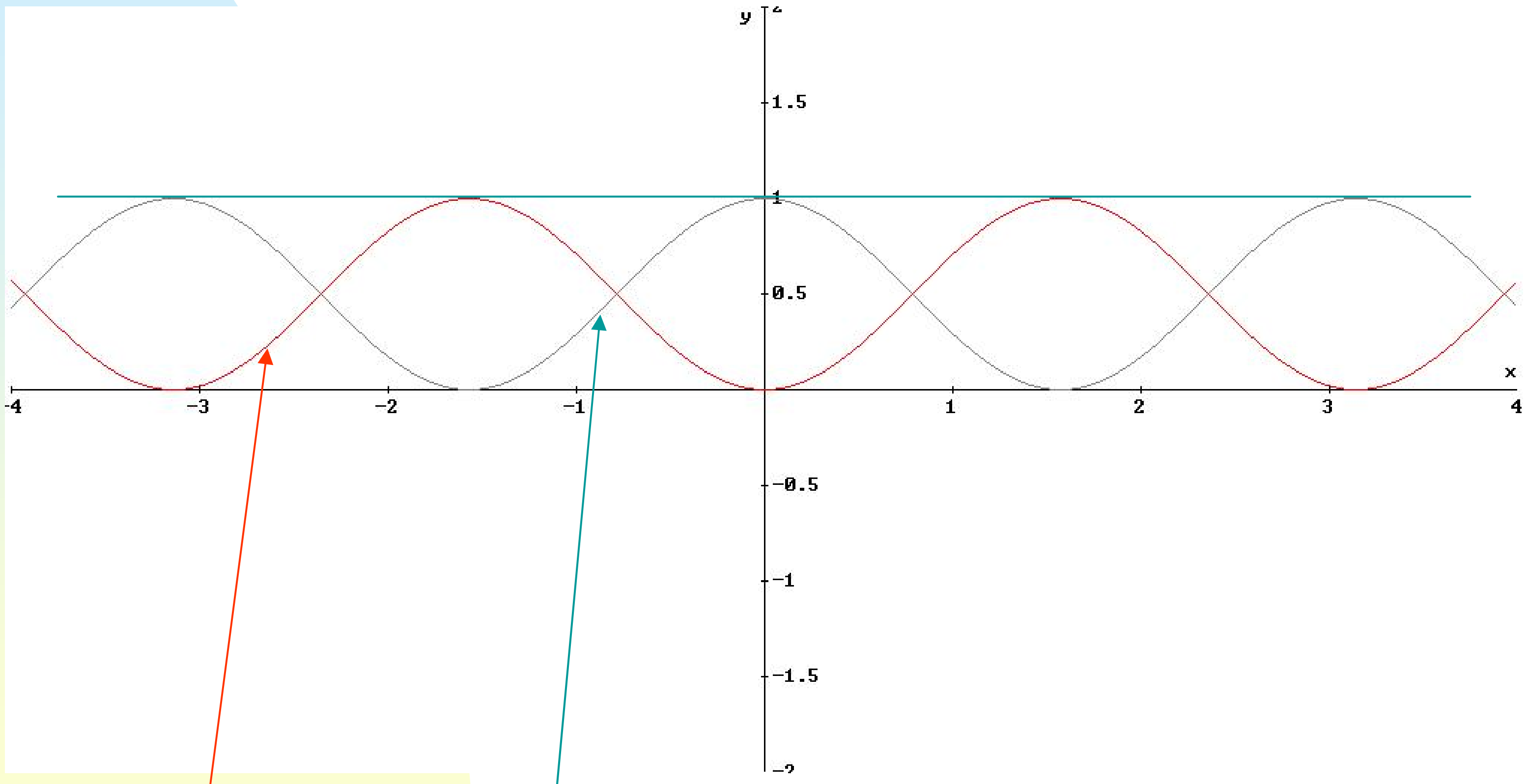
Grafici di funzioni in modulo

ribaltamento attorno all'asse x dei tratti negativi della sinusoide



Funzione quadrato

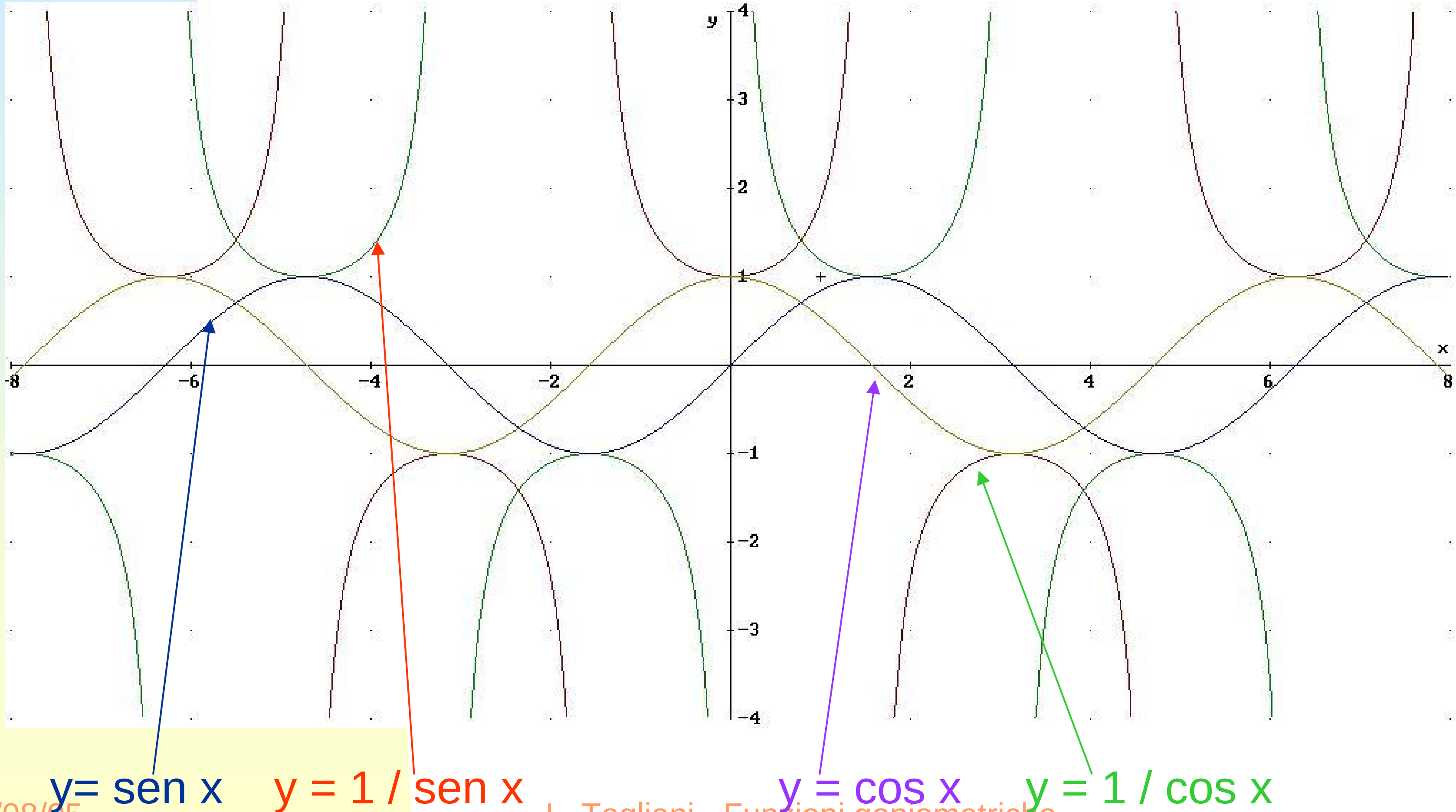
quadrato di $y = \text{sen } x$ e di $y = \cos x$



$y = \text{sen}^2 x$ $y = \cos^2 x$ *Si 'scopre' che:* $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

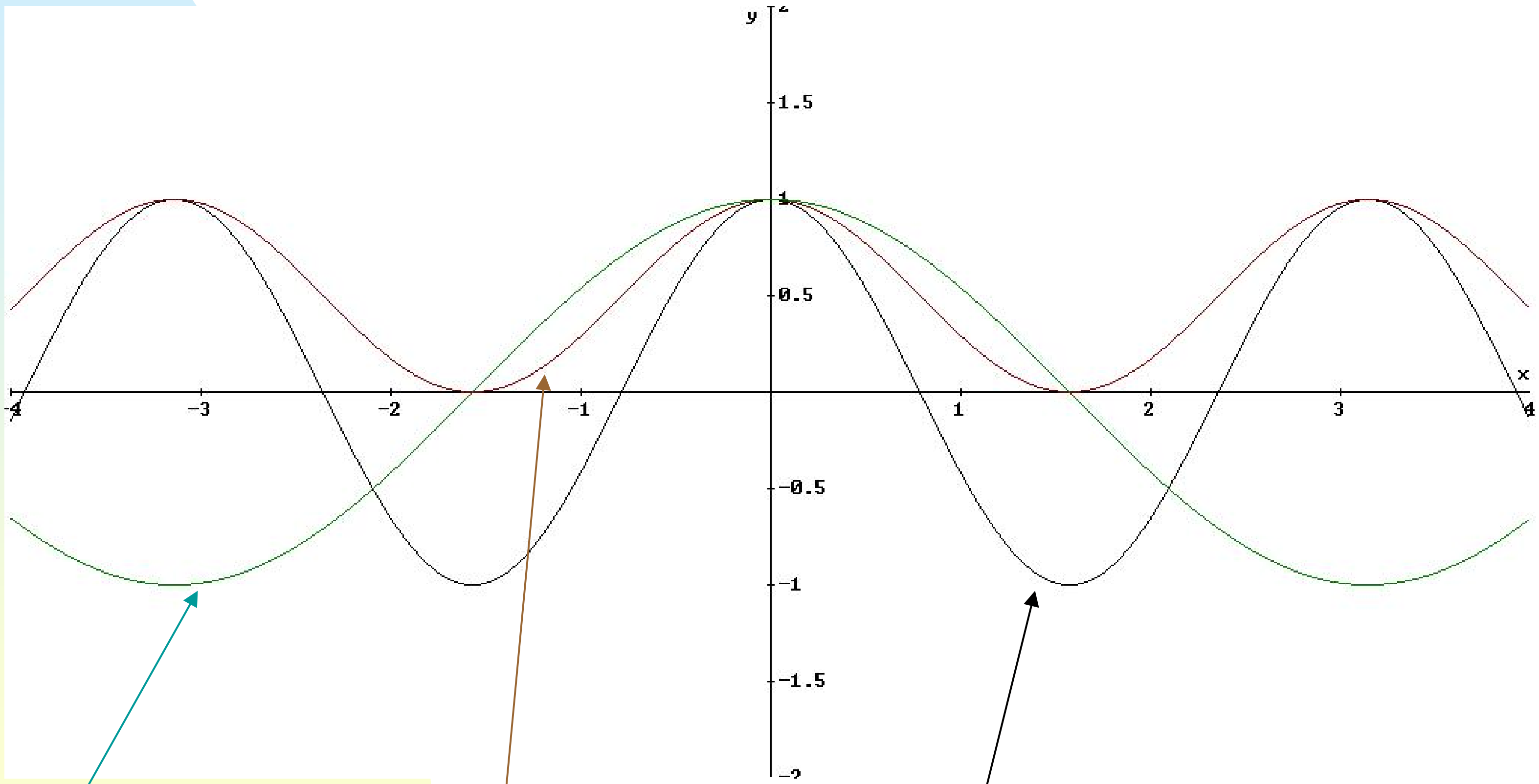
Reciproca di una funzione

reciproche di y = sen x e di y = cos x



‘Scoprire’ identità goniometriche

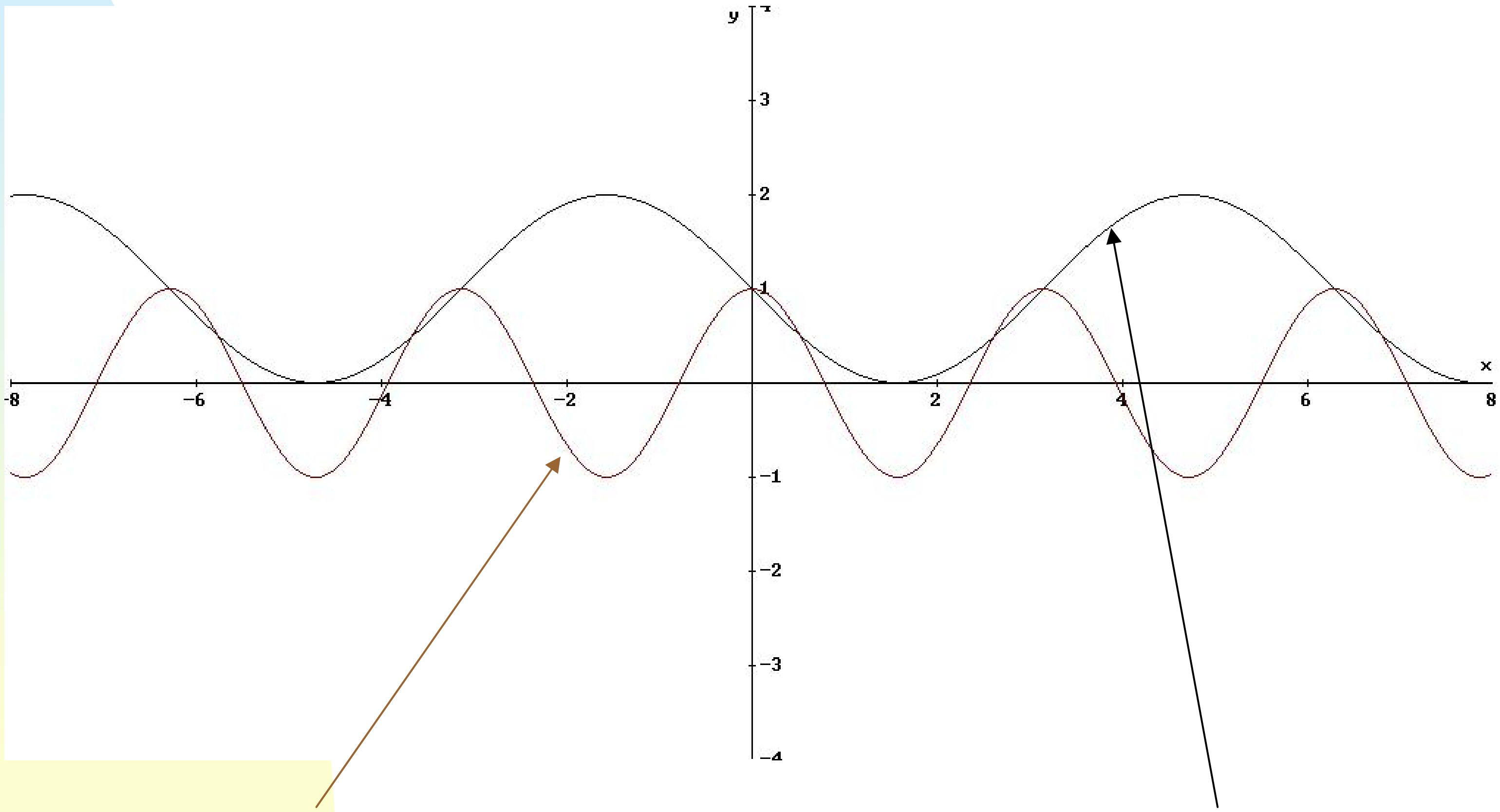
formula di duplicazione: **$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$**



$y = \cos x$ $y = \cos^2 x$ $y = \cos 2x$ (dilatazione e traslazione)

Risolvere equazioni goniometriche

Equazione di 2° grado: **cos 2x = 1 - sen x**

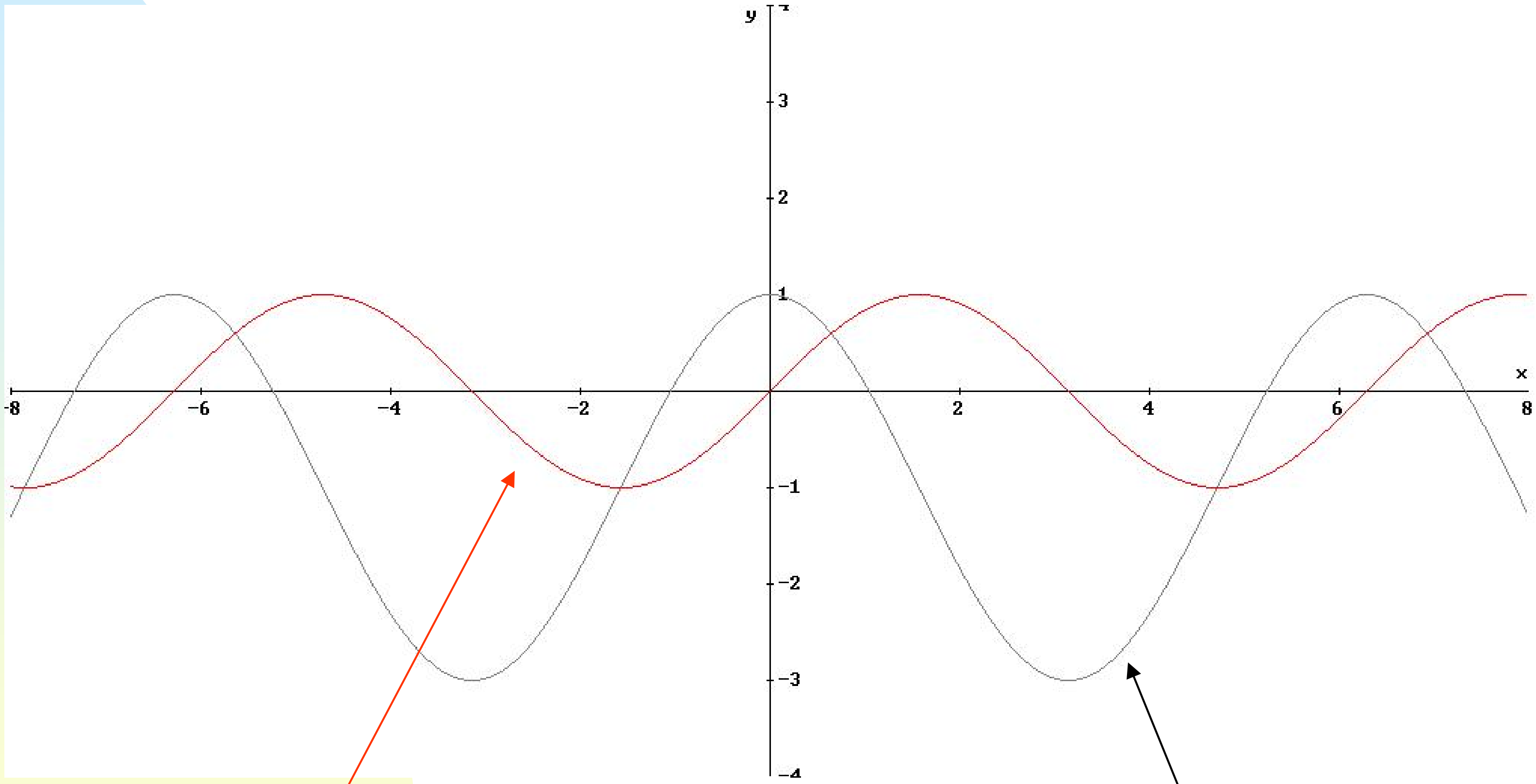


y = cos 2x

y = 1 - sen x

Risolvere disequazioni goniometriche

Disequazione lineare: **sen x > 2 cos x - 1**



y = sen x

y = 2 cos x -1

Funzione lineare in seno e coseno

Problema: graficare **y = *a* sen x + *b* cos x ,** $a^2 + b^2 \neq 0$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{sen\,x} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

posto:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$A = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$y = A\mathrm{sen}(x+\varphi)$$

a = √3 , b = 1 , A = 2 , φ = π/6

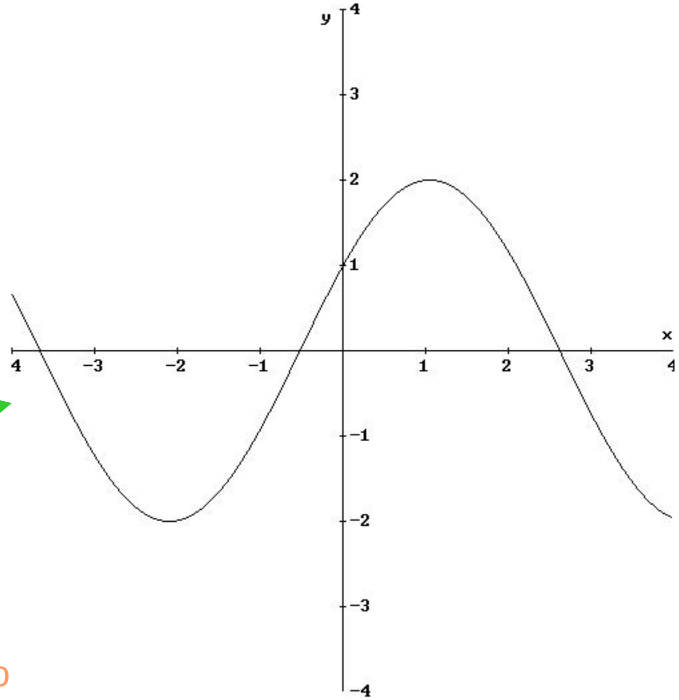


Figure di Lissajous

Composizione di due moti armonici su assi ortogonali (centro in comune).

Una figura di Lissajous ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y = A_2 sen(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

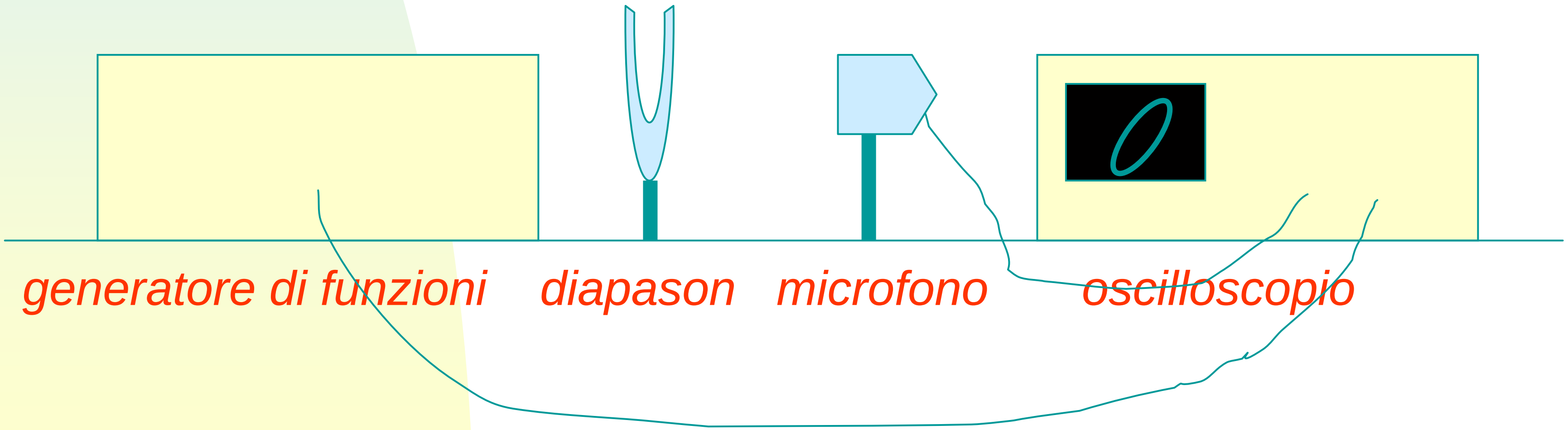


Figure di Lissajous

```
program   FIGURE_DI_LISSAJOUS;
var       a1, a2, b1, b2, c1, c2: real; t, x, y, x1, y1: real;
begin
          clrscr;
          Writeln('ampiezza a1 = '); readln(a1);
          writeln('pulsazione b1 = '); readln(b1);
          writeln('fase iniziale c1 = '); readln(c1);
          Writeln('ampiezza a2 = '); readln(a2);
          writeln('pulsazione b2 = '); readln(b2);
          writeln('fase iniziale c2 = '); readln(c2);
          hires;
          t:=0;
          repeat
                x:=a1*cos(b1*t+c1);
                y:=a2*sin(b2*t+c2);
                x1:=x+320;
                y1:=-y+100;
                plot(round(x1),round(y1),1);
                t:=t+0.01
           until t>2*pi
end.
```

Funzioni inverse

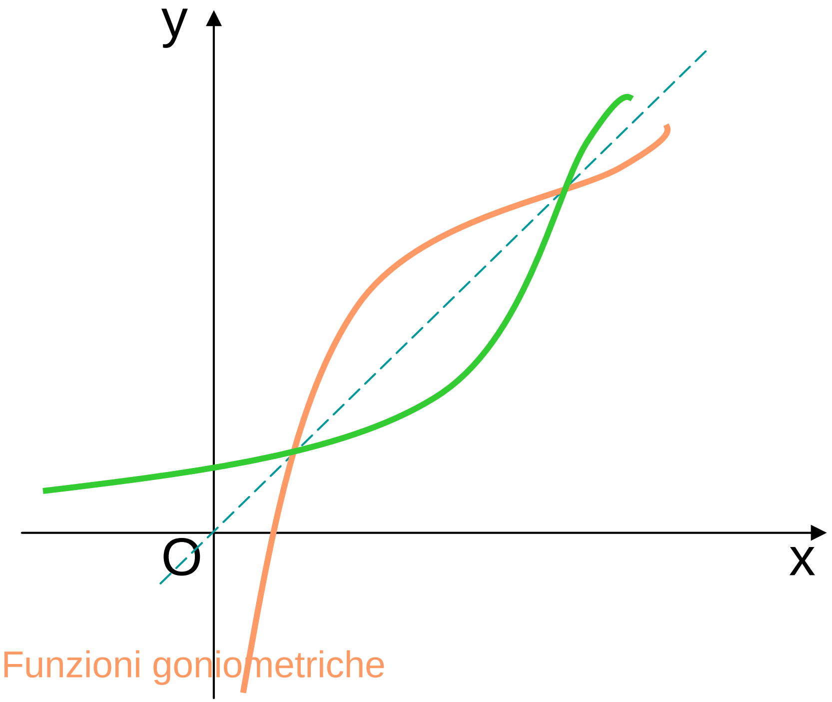
Quando una funzione numerica reale è invertibile?

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

f è monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva $\Rightarrow$ f è invertibile

Aspetti geometrici:

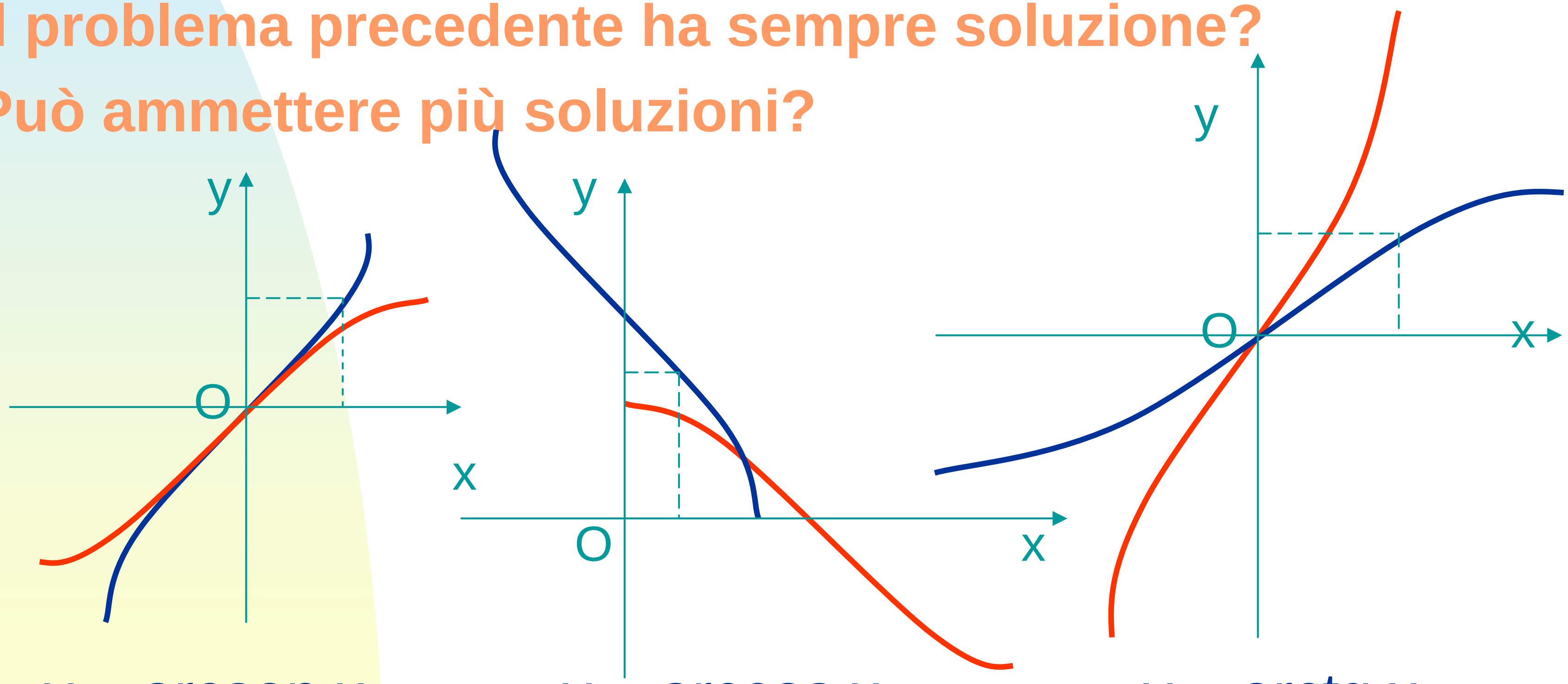
grafico di **f^{-1}** simmetrico del grafico di **f** rispetto alla bisettrice: y = x



Inverse delle funzioni goniometriche

- **Problema: qual è l'ampiezza avente per seno, per coseno, per tangente,… un numero reale assegnato?**
- **Il problema precedente ha sempre soluzione?**

Può ammettere più soluzioni?



y = arcsen x

y = arccos x

y = arctg x

Inverse delle funzioni goniometriche

Necessità di esprimere il dominio e il codominio per poter invertire le funzioni goniometriche

seno	$y = \text{sen } x$	$Df = [-\pi/2, \pi/2]$	$Cf = [-1,1]$
arcoseno	$y = \text{arcsen } x$	$Df = [-1,1]$	$Cf = [-\pi/2, \pi/2]$
coseno	$y = \cos x$	$Df = [0, \pi]$	$Cf = [-1,1]$
arcocoseno	$y = \arccos x$	$Df = [-1,1]$	$Cf = [0, \pi]$
tangente	$y = \text{tg } x$	$Df =]-\pi/2, \pi/2[$	$Cf = \mathbf{R}$
arcotangente	$y = \text{arctg } x$	$Df = \mathbf{R}$	$Cf =]-\pi/2, \pi/2[$

Un po' di esercizi o problemi

- Determina il periodo delle funzioni:

$$y = \cos 6x \quad , \quad y = sen\,\pi x \quad , \quad y = sen\,6x + sen\,8x$$

- Stabilisci qual è il periodo della funzione:

$$y = a sen\,hx + b sen\,kx$$

- Trasforma la sinusoide applicandole ciascuna delle trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x/2 \\ y' = 3y \end{cases}$$

  e rappresenta la curva trasformata.

- Determina le trasformazioni che mutano la cosinusoide nelle curve di equazioni:

$$y = 2\cos(x - \pi/3) \quad ; \quad y = -1 + sen\,x \quad ; \quad y = -3\cos(-x) + 2$$

  Traccia il grafico di ognuna di tali curve.

Un po' di esercizi o problemi

- Rappresenta, motivando i passaggi usati, le curve di equazioni:

$$y = 2sen\,x - \cos x \quad ; \quad y = -2\cos^2 x \quad ; \quad y = 3sen|x| \quad ; \quad y = 2\cos(3x + \pi/3)$$

- Rappresenta, motivando i passaggi usati, le curve di equazioni:

$$y = x\,sen\,x \quad ; \quad y = 2\cos^2\left(x/2\right) \quad ; \quad y = \cos(2x-1) + \cos(2x+1)$$

- Rappresenta, motivando i passaggi usati, le curve di equazioni:

$$y = |tg(x/2)| \quad ; \quad y = 2\sec(x - \pi/3) \quad ; \quad y = \frac{1}{2}\text{cotg}(3x)$$

- Determina periodo, ampiezza, fase iniziale e pulsazione del moto armonico avente legge oraria:

$$s = 10sen(3\pi t - \pi/4)$$

Tracciato il grafico di s=s(t), stabilisci in quali istanti si annulla la velocità.

Un po' di esercizi o problemi

- Come risolvi le equazioni: $x = \cos x$, $x = sen\, x$?
- Usando i grafici delle funzioni goniometriche risolvi le disequazioni:

$$\cos 3x > \cos 5x \quad , \quad \sqrt{3}\cos^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right) senx \cos x + sen^2 x < 0$$

- Determina l'equazione cartesiana per le figure di Lissajous aventi le seguenti equazioni parametriche e rappresentale:

$$\begin{cases} x = 3\cos(2t+\pi) \\ y = 3sen2t \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = \cos 3t \\ y = 2sen3t \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2sent \end{cases}$$

- Usando i grafici delle funzioni goniometriche risolvi le disequazioni:

$$sen|x| \leq 1 - x^2 \quad , \quad \left|\cos x - \sqrt{3}senx\right| > \sqrt{2} \quad , \quad tg\,2x \geq tg\,x$$

Dalla maturità (o esame di stato)

Studi con funzioni goniometriche - Liceo Scientifico

- **1983 - sessione ordinaria**

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x) \quad \Rightarrow \quad y = e^{f(x)}$$

- **1993 - sessione ordinaria**

$$\begin{cases} x = sent \\ y = sen2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = \pm f(x)$$

- **1995 - sessione ordinaria**

$$y = senx + \frac{1}{4senx}$$

- **1996 - sessione suppletiva**

$$S = {a^2}/{6}\left(4sen^2x + 3senx\cos x\right)$$

Dalla maturità (o esame di stato)

- **1997 - sessione suppletiva**

  $$y = sen\,x + \frac{1}{3}sen3x \quad ; \quad \text{periodo di: } y = sen\,nx + \frac{1}{3}sen\,mx$$

- **1998 - sessione ordinaria**

  $$V(x) = \frac{\pi}{2}a^3\left(4sen\,x + 3\cos x\right)$$

- **2002 - sessione ordinaria sperimentale (quesito)**

  Cosa si intende per funzione periodica? Quale è il periodo di

  $f(x) = \text{-}sen\dfrac{\pi x}{3}$? Quale quello di $sen2x$?

- **2004 - sessione ordinaria sperimentale**

  $$g(x) = sen\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} + x$$

Le funzioni goniometriche nella storia

Quando e dove sono nate le funzioni goniometriche?

Babilonesi
Egiziani → Greci - Ellenismo
Indiani → Arabi → Europa occidentale

- Papiro Rhind - tavoletta Plimpton 322 (1700 a.C.ca) - Beroso (180 a.C.)
- Teoremi del coseno e dei seni negli *Elementi* di Euclide (300 a.C.)
- Relazioni tra angoli e corde in Aristarco (310-230 a.C.) e in Eratostene (276-194 a.C.) → **Astronomia**
- Prime (?) tavole goniometriche in Ipparco (180-125 a.C.)
- Trigonometria sferica di Menelao (100 a.C.)
- Formulario e tavole nell'*Almagesto* di Tolomeo (150 d.C.)

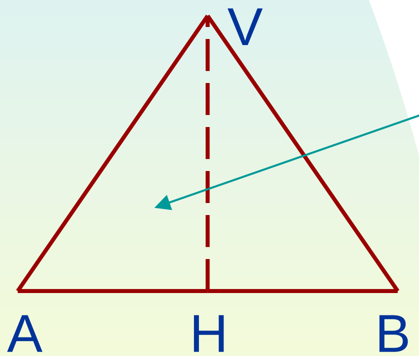
Le funzioni goniometriche nella storia

- *Sulvasutra* e *Siddhanta* (dal 400) indiani: introduzione concetto di seno
- Scuola del Kerala (1400): sviluppi in serie funzioni goniometriche
- Arabi: funzioni goniometriche (IX sec), identità (IX-XIII sec.), tavole (X-XV sec), scuole di traduzione (VIII-IX sec)

- Europa occidentale: traduttori (XII sec), trigonometria come disciplina autonoma (Regiomontano 1464) e completa (Viete 1593)
- Sviluppi in serie e legami con l'analisi (Gregory, Newton e Leibniz XVII sec, Riccati XVIII sec) e con i numeri complessi (De Moivre e Euler, XVIII sec)

Prototrigonometria

Papiro di Rhind o di Ahmes (1650 a.C.) → problema 56: *determinare il 'seqt' (rapporto profondità/elevazione) di una piramide alta 250 cubiti con base quadrata di lato 360 cubiti*→ forse c'è il concetto di cotangente



$$\text{seqt}\,\hat{A} = \frac{\overline{AH}}{\overline{VH}} = \frac{180}{250} = \text{cotg}\,\hat{A}$$

$$\text{seqt}\,\hat{A} = \frac{\overline{AH}}{\overline{VH}} = \frac{220}{280}$$

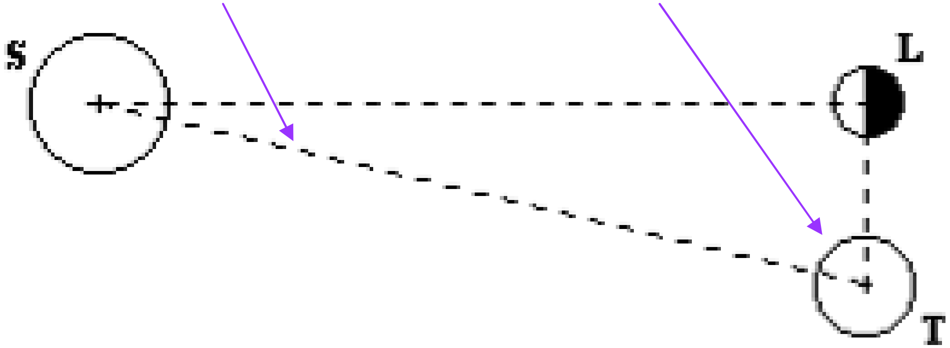
→ *piramide di Cheope*

Tavoletta Plimpton 322 (1700 a.C. ca, periodo babilonese antico) → forse ha una tavola dei quadrati della secante e della tangente - non chiara la misura delle ampiezze

Aristarco di Samo (prima del 260 a.C.)

3° (invece è 9' ca)

87° (invece è 89°51' ca)

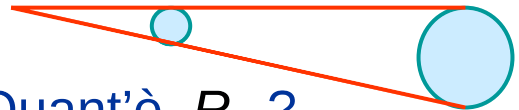


$$\overline{LT}/\overline{ST} = sen\, 3°$$

$$sen\, 3° \cong 1/19 \Rightarrow \overline{ST} \cong 19\, \overline{LT} \qquad \left(invece \quad \overline{ST} \cong 388\, \overline{LT}\right)$$

$$0 < \alpha < \beta < \pi/2 \Rightarrow sen\alpha < \alpha < tg\alpha\, ,\, sen\beta < \beta < tg\beta \Rightarrow \frac{sen\alpha}{sen\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

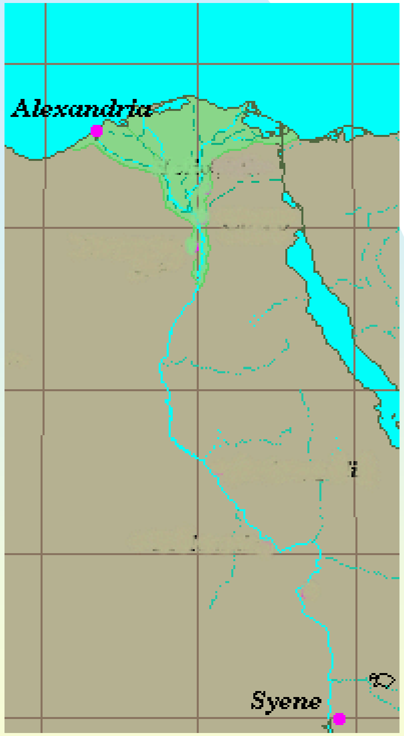
Aristarco sa che il Sole e la Luna si vedono dalla Terra sotto lo stesso angolo (è circa 30'): quindi $R_S \cong 19\, R_L$

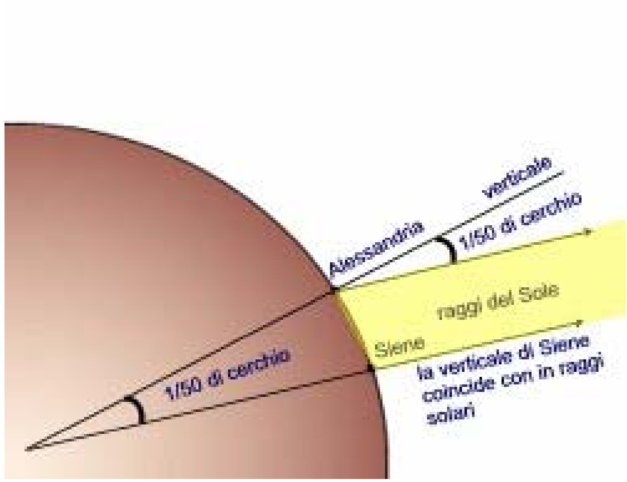


Dimostra: $\frac{19}{60} < \frac{R_L}{R_T} < \frac{43}{108}$, $\frac{19}{3} < \frac{R_S}{R_T} < \frac{43}{6}$ Quant'è R_T ?

Eratostene di Cirene (III secolo a.C.)

Misura del raggio terrestre





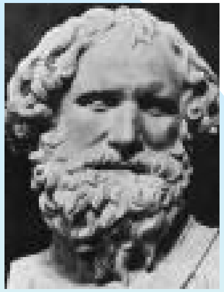
Terra sferica

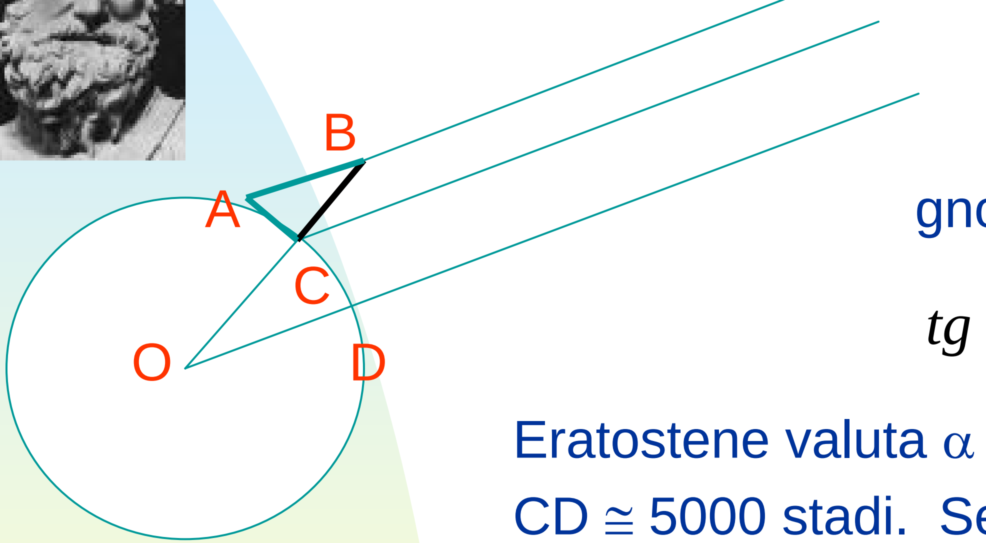
Siene e Alessandria sullo stesso meridiano

Ipotesi ⇒ raggi del Sole paralleli

misura certa della distanza Siene-Alessandria

Eratostene di Cirene (III secolo a.C.)





$$A\hat{B}C = C\hat{O}D = \alpha$$

C : Alessandria D : Siene

gnomone BC al solstizio estivo

$$tg\ \alpha = \overline{AC} / \overline{BC}$$

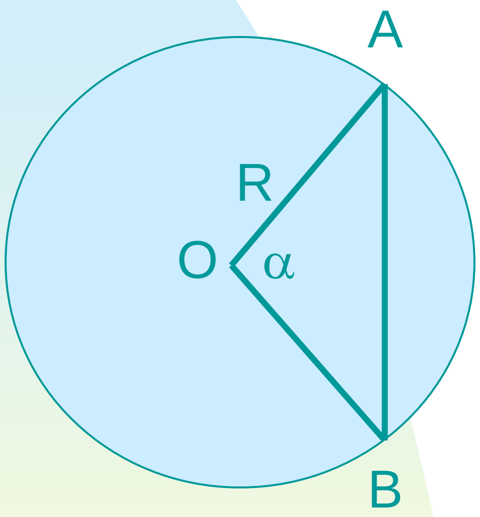
Eratostene valuta $\alpha \cong 360°/ 50$, mentre l'arco CD $\cong$ 5000 stadi. Se 1 stadio $\cong$ 160 m, allora:

CD : $2\pi R$ = 1 : 50 e il raggio terrestre $R_T \cong 6369$ km (invece di 6378 km).

Con il valore di R_T calcolato si possono valutare il raggio solare R_S e il raggio lunare R_L usando le relazioni di Aristarco.

Ipparco di Nicea (II sec. a.C.)

Calcolo della lunghezza della corda relativa a un dato angolo al centro



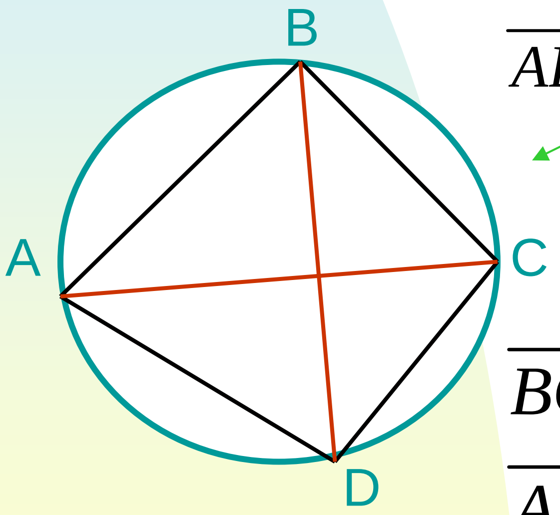
$$\alpha \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 2R \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ipparco tabula i valori delle corde degli archi circolari →

fondatore della trigonometria

Tolomeo (Alessandria, ca 150 d.C.)

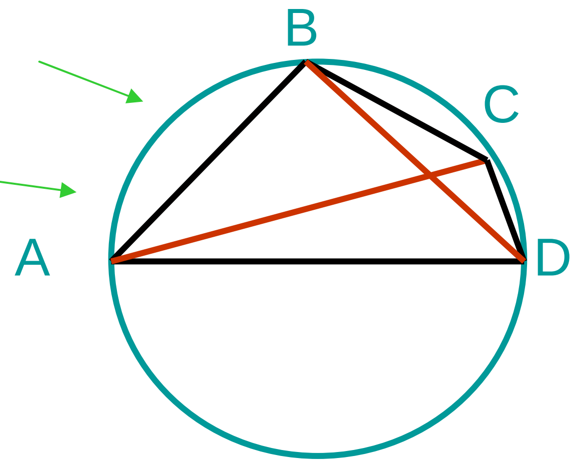
Almagesto : teorema di Tolomeo $\Rightarrow$ formule di addizione e bisezione $\Rightarrow$ costruzione delle tavole goniometriche



$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

se in particolare

$$\overline{AD}=2R \quad \Rightarrow$$



$$\overline{BC}=2R\ sen(\alpha-\beta)$$

$$\overline{AB}=2R\ cos\alpha \qquad \overline{CD}=2R\ sen\beta$$

$$\overline{AC}=2R\ cos\beta \qquad \overline{BD}=2R\ sen\alpha \quad \Rightarrow$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sen\beta$$

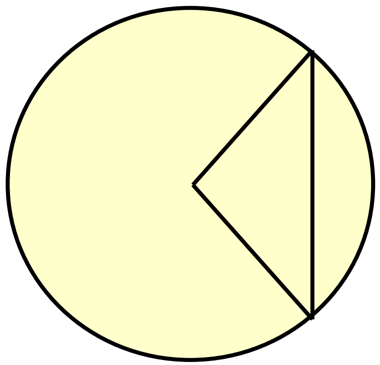
Tolomeo

Dalle formule di sottrazione/addizione a quelle di bisezione con l'uso del I teorema di Euclide.

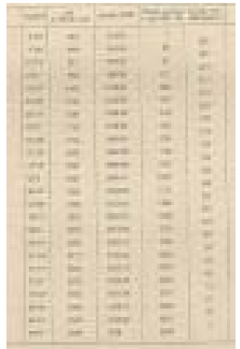
$$sen(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Tolomeo divide il cerchio in 360 parti, 1° in 60' e 1' in 60" ; considera sempre il legame tra la **corda** e l'angolo al centro.

Tolomeo costruisce tavole equivalenti a quelle del seno per 0° < α < 90° con passo 0,25° . (I libro dell'*Almagesto)*. Per costruire le tavole parte da angoli al centro di 120°, 90°, 72°, 60°, 36° e poi usa le sue formule.



La trigonometria indiana



Sulvasutra (400 ca) regole della corda, agrimensura

Siddhanta (400) sistemi di astronomia - *Pancha Siddhantika* di Varahamihira (500) e *Brahma Siddhanta* di **Brahmagupta** (628)

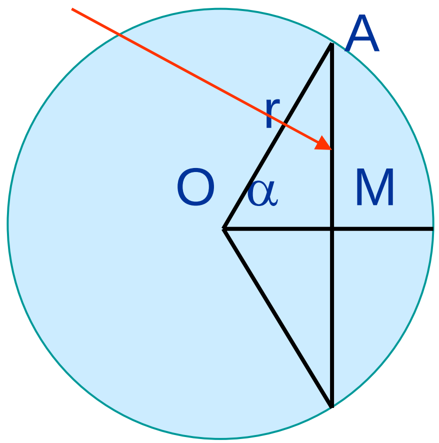
Aryabhata (500)

metà corda

$$jyva\ \alpha = \overline{AM} = r\ sen\ \alpha$$

$$kojyva\ \alpha = \overline{OM} = r\cos\alpha$$

$$jyva\ 30° = r/2 \qquad jyva\ 60° = r\sqrt{3}/2$$



Bhaskara (600 ca) approssima il seno con:

$$sen\ \alpha \cong \frac{16\alpha(\pi-\alpha)}{5\pi^2 - 4\alpha(\pi-\alpha)}$$

Brahmagupta (665) dà formula interpolante i seni delle tavole di Varahamihira e Aryabhata; ad es. 150 sen67°≅138,12 (valore noto oggi ≅ 138,08)

La trigonometria indiana

Sviluppi in serie per costruire le tavole delle funzioni goniometriche

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

serie di Gregory (1668), forse già scoperta da **Madhava** di Sangama_ gramma (1350-1425, scuola del ***Kerala***, India meridionale)

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

serie di Newton (1676) forse già trovate da Madhava

$$sen(x+h) \approx senx + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2} senx$$

$$\cos(x+h) \approx \cos x - \frac{h}{r} senx - \frac{h^2}{2r^2}\cos x$$

(*h piccolo, r raggio*)

formule di Taylor (1685-1731) forse già trovate da Madhava

La trigonometria araba

Selezione di elementi ellenistici e indiani per:

a) introdurre le sei funzioni goniometriche principali

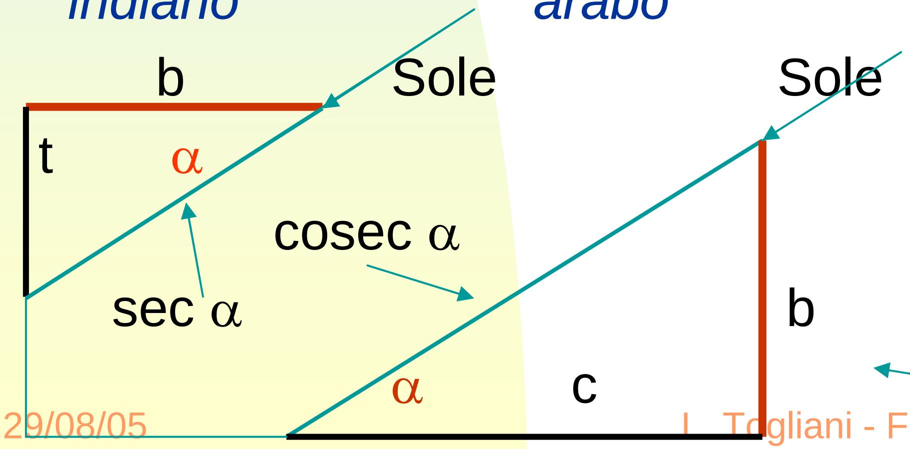
b) formulare il teorema dei seni e altre identità

c) costruire tavole goniometriche dettagliate (interpolazione)

passaggio errato

a) jyva $\rightarrow$ **jiba** $\rightarrow$ **jyb** $\rightarrow$ **jaib** $\rightarrow$ **sinus** (seno, petto, baia, curva)

indiano *arabo* *latino*



al-Hasib (IX secolo) definisce:

$t = b\, tg\alpha = tg\alpha \quad (b = 1)$ *zill*

$c = b\, cotg\alpha = cotg\alpha \quad (b = 1)$ *zill makus*

α altezza del Sole, b bastoncino

La trigonometria araba

Scuole arabe di traduzione (Baghdad VIII-IX sec) $\rightarrow$ testi indiani, persiani, siriaci, greci $\rightarrow$ trasmissione all'Europa

es. *Elementi* di Euclide   *Almagesto* di Tolomeo $\leftarrow$ **Thabit ibn Qurra**

b) Abu Wafa (X sec) $\rightarrow$ formule addizione/sottrazione

Nasir al-Tusi (XIII sec) $\rightarrow$ teorema dei seni

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= sen(90° - \alpha) \\ cotg\,\alpha &= tg(90° - \alpha) \end{aligned}}$$

c) Al-Hasib (850 ca) $\rightarrow$ tavole del seno e della tangente con 5 decimali esatti, con passo 1°, usando le formule di sottrazione e di bisezione

Ulug Beg (1440) $\rightarrow$ tavole con passo 1', con 5 decimali esatti

al-Kashi (XV sec) $\rightarrow$ col metodo iterativo ottiene 16 decimali esatti

La trigonometria araba

Al-Kashi (1380 ca - 1429) in *Trattato sulla corda e sul seno*

usa: $$sen\,3\alpha = 3sen\,\alpha - 4sen^3\alpha$$

noto sen 3α = sen 3° (bisezione), posto x = sen α = sen 1° ,

si ottiene: $$x = \frac{4x^3 + \text{sen}\,3°}{3}$$

se x è piccolo, x^3 sarà trascurabile ⇒

per approssimazioni:

$$x_1 = \frac{sen\,3°}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{4x_1^{\;3} + sen\,3°}{3} \quad , \quad .... \quad , \quad x_n = \frac{4x_{n-1}^{\;\;3} + sen\,3°}{3}$$

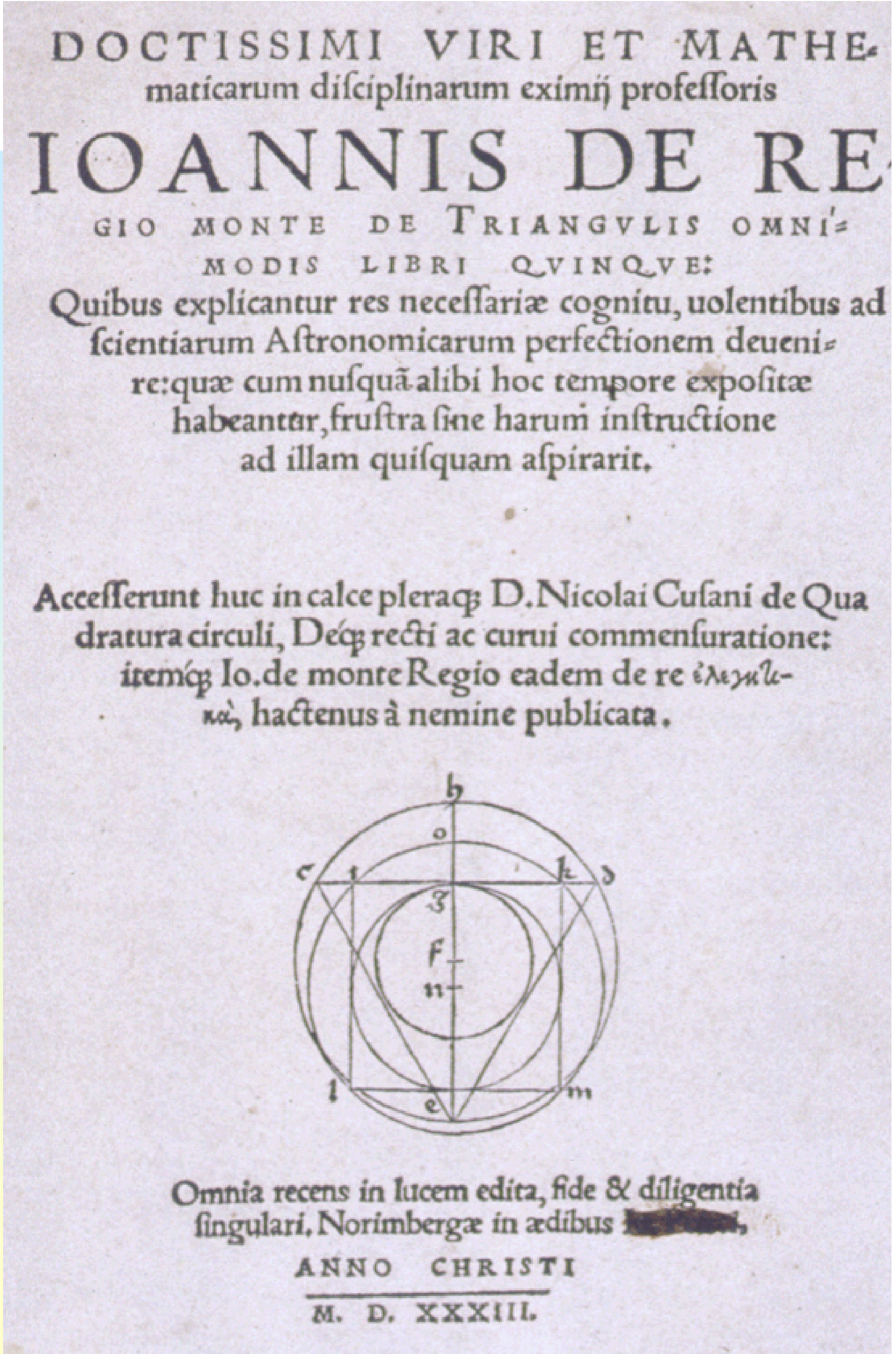
metodo iterativo

La trigonometria in occidente

Scuole di traduttori del XII secolo

- **Gerardo da Cremona** → *Almagesto* di Tolomeo, *Elementi* di Euclide, *Algebra* di al-Khuwarizmi
- **Roberto da Chester** → *Algebra* di al-Khuwarizmi introduzione di *sinus* dall'arabo *jiba* e *jaib*

Regiomontano (J. Müller da Konigsberg, 1436-1476)
De triangulis 1464 → trigonometria disciplina autonoma dall'astronomia
Tabulae directionum → tavole del seno e della tangente (*numerus*)
Usa strumenti algebrici (arabi) per la trigonometria
Nicolò Copernico (1473-1543) → *De lateribus et angulis triangulorum* 1542, simile al *De triangulis* → allievo **Rheticus** (1514-1576) in *Opus palatinum de triangulis:* sviluppo trigonometria, tavole molto elaborate (raggio di 10.000.000 di unità) → **Pitiscus** : *'Trigonometria'* (1595)


DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum diſciplinarum eximij profeſſoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res neceſſariæ cognitu, uolentibus ad ſcientiarum Aſtronomicarum perfectionem deueni-re: quæ cum nuſquã alibi hoc tempore expoſitæ habeantur, fruſtra ſine harum inſtructione ad illam quiſquam aſpirarit.

Acceſſerunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cuſani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commenſuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλλην-κῶς, hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia ſingulari. Norimbergæ in ædibus [redacted],
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

Regiomontano

De triangulis , edizione 1533

La trigonometria in occidente

François Viète (1540-1603)

- *Canon mathematicus* 1579 : tavole delle sei funzioni goniometriche, necessità di sostituire le frazioni sessagesimali in decimali
- *Variorum de rebus mathematicis* 1593: teorema delle tangenti, formule di prostaferesi e di Werner(1468-1528); con una formula si eseguiva il prodotto x·y : posto x=2 cos α , y=cos β , ricavati α e β con le tavole $\Rightarrow$

  x·y = 2 cos α · cos β = cos(α+β) + cos(α–β) $\leftarrow$ *letti sulle tavole* $\rightarrow$

  si esegue una somma al posto di un prodotto $\rightarrow$

  metodo usato da Ticho Brahe da Nepero (introduce i logaritmi nel 1614)
- cos 2α , cos 3α , …. sen 2α , sen 3α , ….

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2}x\, sen^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4}x\, sen^4 x - \dots$$

$$sen\, nx = n\cos^{n-1}x\, sen x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3}x\, sen^3 x + \dots$$

La trigonometria in occidente

James Gregory (1638-1675), **Isaac Newton** (1642-1727), **Gottfried W. Leibniz** (1646-1716) $\rightarrow$ sviluppi in serie e legami con l'analisi

Jacques (1654-1705) e **Jean** (1667-1748) **Bernoulli** $\rightarrow$ cos nx , sen nx per n razionale

Abraham De Moivre (1667-1754) $\rightarrow$ $\cos nx + i \operatorname{sen} nx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$

formula da lui usata anche se non esplicitata

Leonhard Euler (1707-1783) $\rightarrow$ $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ $\rightarrow$ sen(1+i)

e altre applicazioni nel campo complesso

Vincenzo Riccati (1707-1775) $\rightarrow$ funzioni iperboliche:

$$cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x = cosh\ x + senh\ x$$

J. B. Delambre (1749-1822) e **P. F. Mechain** (1744-1804) $\rightarrow$ meridiano terrestre $\rightarrow$ unità 'naturale' per le lunghezze

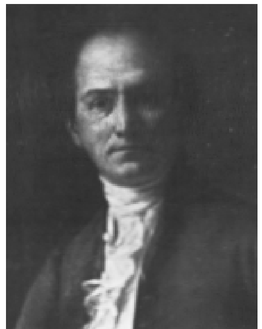
Trigonometria: indirizzi

A partire dal XVII secolo:

trigonometria → **indirizzo 'funzionale' e analitico**

trigonometria → **indirizzo topografico e astronomico**

Eulero



Delambre

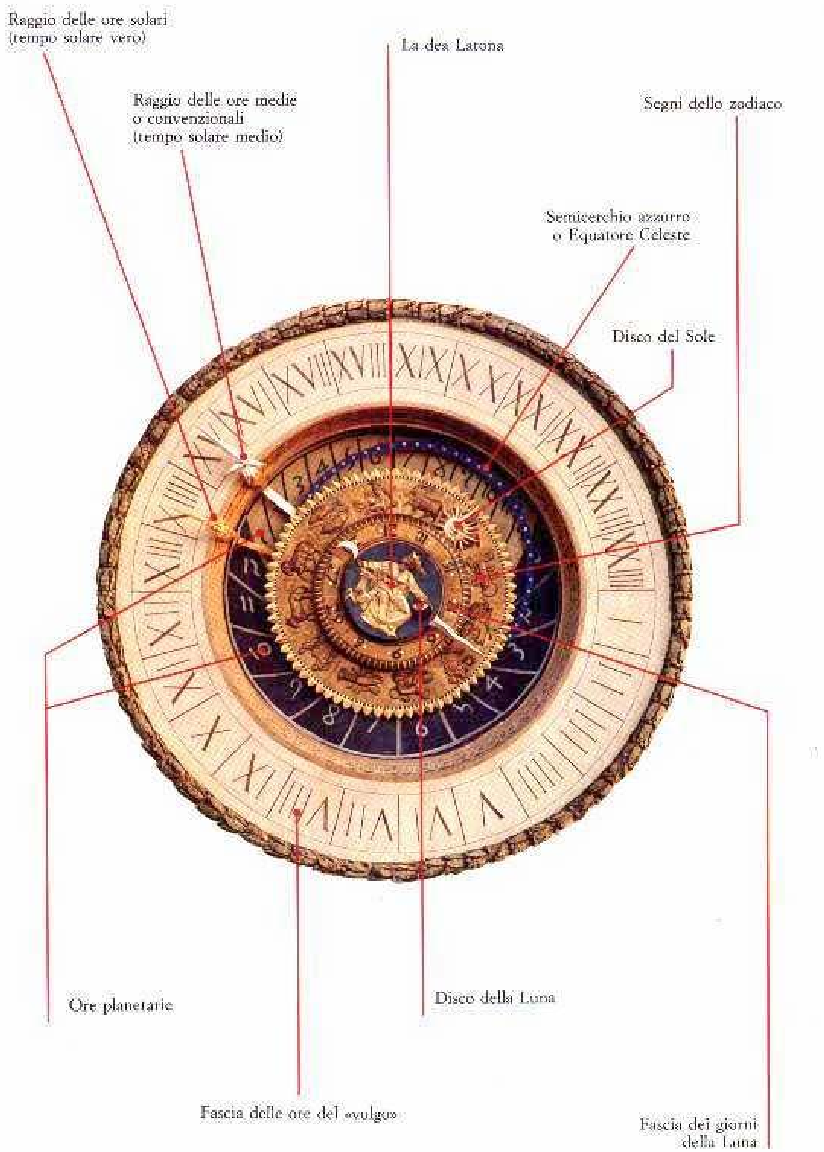
Funzioni goniometriche: terminologia

- **seno** : Roberto da Chester (XII sec.) dall'indiano *jyva* (Aryabhata, 500)
- **coseno**: Edmund Gunter (1620) e Viete (XVII sec.) usa *sinus residuae*
- **tangente**: Thomas Fincke (1583)
- **cotangente**: Edmund Gunter (1620)
- **radiante**: James Thomson (1873)

Si sono usate anche le funzioni senoverso (versen (x) = 1 - cos x) e cosenoverso (vercos (x) = 1 - sen x)

Bibliografia siti web

- C. Boyer (2002) - Storia della Matematica - Oscar Mondadori, MI
- G. Ghevergese Joseph (2003) - C’era una volta un numero - TEA, MI
- E. Carruccio (1978) - Storia delle matematiche - Pitagora, BO
- Lamberti-Mereu-Nanni (2001) - Matematica due - ETAS, MI
- Negrini-Ragagni (2003) - MAST, Temi di Matematica per l’esame di stato - Clio, MI
- Bergamini-Trifone-Barozzi (2005) - Manuale blu di Matematica - Zanichelli, BO
- Bellodi-Francesio-Pezzi-Puviani (1990) - Linguaggio Pascal - Zanichelli, BO
- www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/index.html
- www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/Analysis.html
- www.matematicamente.it/storia/index.html


Raggio delle ore solari
(tempo solare vero)
La dea Latona
Raggio delle ore medie
o convenzionali
(tempo solare medio)
Segni dello zodiaco
Semicerchio azzurro
o Equatore Celeste
Disco del Sole
Ore planetarie
Disco della Luna
Fascia delle ore del «vulgo»
Fascia dei giorni
della Luna