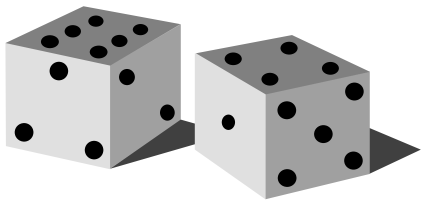
Distribuzioni di probabilità: lancio di dadi e altri eventi casuali

Luigi Togliani

Liceo Scientifico “Belfiore” - Mantova



Corso di Formazione per docenti - U.S.R. Lombardia

"Fisica... probabilmente”

I.I.S. "Perlasca" di Idro

28 agosto - 1 settembre 2006

SOMMARIO

- INTRODUZIONE
- CONCETTO DI PROBABILITA'
- DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'
- GIOCHI E PARADOSSI
- ESPERIMENTI E APPLICAZIONI INFORMATICHE
- ELEMENTI DI STORIA
- BIBLIOGRAFIA

PERCHE’ LA PROBABILITA’?

“*Forse nessun settore della matematica è così intellettualmente stimolante come la probabilità; ... basta un bagaglio estremamente ridotto per raggiungere risultati interessanti…argomenti altrimenti noiosi come le frazioni o le operazioni insiemistiche possono essere richiamati dalla cultura della scuola media in contesti inaspettati e stimolanti.*”

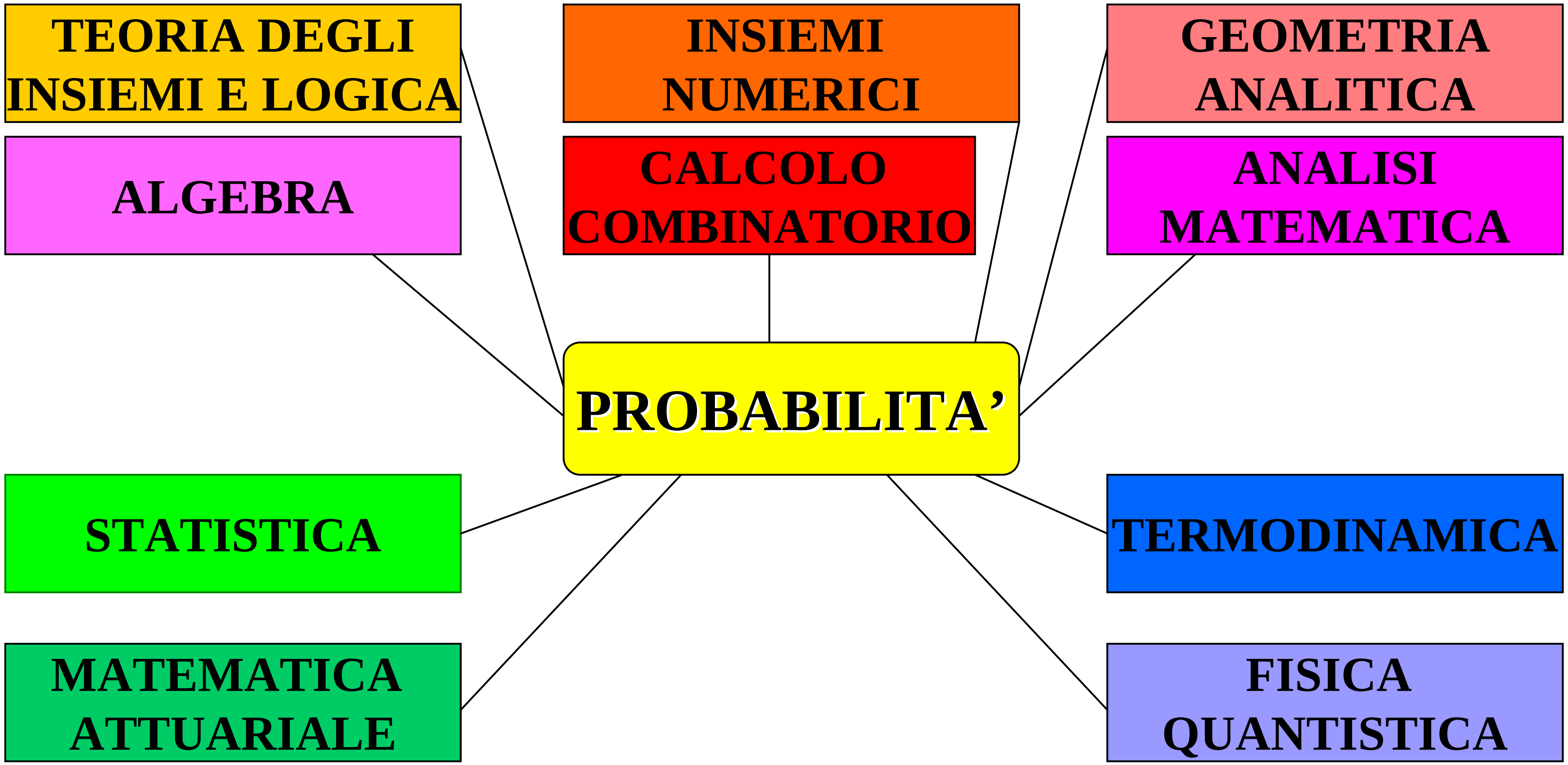
(G. Prodi, ‘*Matematica come scoperta*’,1983)

C.I.I.M.-U.M.I. programmi di Frascati 1966-67 e attività di sperimentazione 1975-77

PREREQUISITI E DESTINATARI

	Prerequisiti	Destinatari
Concetto di probabilità	Numeri naturali e loro operazioni	Prima liceo
Teoremi sulla probabilità	Insiemi, logica, algebra, funzioni, calcolo combinatorio	Seconda e terza liceo
Distribuzioni di probabilità	Funzioni, geometria analitica, analisi matematica	Quarta e quinta liceo

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO



PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

CM 6-2-1991 PNI biennio Liceo Scientifico

TEMA 4. ELEMENTI DI PROBABILITA' E DI STATISTICA

a) Semplici spazi di probabilità: eventi aleatori, eventi disgiunti e "regola della somma".

b) Probabilità condizionata, probabilità composta. Eventi indipendenti e "regola del prodotto".

c) Elementi di statistica descrittiva: ….

COMMENTO AL TEMA 4. Al concetto di probabilità si perverrà da vari punti di vista, avvalendosi di opportune esemplificazioni tratte da situazioni reali. L'analisi dei problemi sarà facilitata da appropriate rappresentazioni: diagrammi di Eulero-Venn e, soprattutto, grafici di vario tipo. Il programma di statistica […]

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

CM 27-9-96 PNI triennio Liceo Scientifico

TEMA 4 - PROBABILITA' E STATISTICA

4.a Statistica descrittiva bivariata: ... Regressione e correlazione

4.b Valutazioni e definizioni di probabilità in vari contesti

4.c Correlazione, indipendenza, formula di Bayes.

4.d Variabili aleatorie in una e *in due dimensioni* (casi finiti)

4.e Variabili aleatorie discrete: distribuzioni binomiale, *geometrica, di Poisson*

4.f Distribuzioni continue. Distribuzione normale ed errori di misura nelle scienze sperimentali. *Distribuzione uniforme. Distribuzione esponenziale.*

4.g Legge dei grandi numeri (Bernoulli)

4.h *Confronti tra le distribuzioni binomiale, di Poisson, normale (mediante la costruzione di tabelle numeriche).*

4.i *Inferenza statistica: stima dei parametri per modelli semplici.*

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

COMMENTO al tema n. 4 - Probabilità statistica

Gli elementi di calcolo delle probabilità e statistica rispondono all'esigenza di abituare l'alunno ad effettuare <u>modellizzazioni di situazioni in condizioni di incertezza</u>.[...] Una possibile <u>sintesi tra le varie definizioni</u> (di probabilità), che potrà essere effettuata all'ultimo anno, sta nella <u>formalizzazione assiomatica</u> della teoria, che va presentata e motivata sia da un punto di vista storico, sia secondo una giustificazione di comodità per lo sviluppo dell'intera teoria, sia per fornire un <u>ulteriore esempio di teoria matematica</u> espressa in forma ipotetico-deduttiva.[...]Le semplici <u>distribuzioni di probabilità</u>, che saranno trattate se il docente lo ritiene opportuno, sono sufficienti a dare indicazioni non banali sulla problematica di questa parte del calcolo delle probabilità, anche perché sono <u>particolarmente ricche di applicazioni in vari contesti</u>: […]

PROBABILITA' E PROGRAMMI D'INSEGNAMENTO

Lo studio della curva normale, introdotta anche sperimentalmente, e delle altre distribuzioni fornisce esempi significativi per l'applicazione di metodi e concetti dell'analisi, in particolare attraverso l'eventuale esame dei legami tra le distribuzioni binomiale e poissoniana, binomiale e normale, e mediante la costruzione numerica di tabelle approssimate.
La legge dei grandi numeri fornisce un anello che lega i problemi statistici ed i modelli probabilistici permettendo, volendo, di introdurre già alcuni esempi significativi di inferenza. L'insegnante può presentare tale legge dal punto di vista teorico, con eventuale dimostrazione, oppure dal punto di vista empirico presentando al computer simulazioni di tipo bernoulliano.[...]Particolare cura sarà posta nel ricordare le basi storiche e filosofiche (Pascal, empirismo inglese, ecc.).

EVENTI

EVENTO

PROPOSIZIONE ⟷ **INSIEME**

Algebra di Boole

"Un evento non può essere che o ***vero*** *o* ***falso****; può essere* ***incerto*** *solo se e in quanto non siamo in possesso dell'informazione attestante che è vero oppure che è falso."* (B. De Finetti, 1970)

INCERTEZZA - POSSIBILITA'

PROPOSIZIONI → **CERTAMENTE VERE**

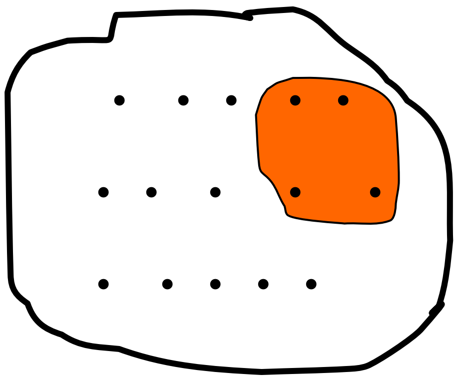
PROPOSIZIONI → **CERTAMENTE FALSE**

PROPOSIZIONI → **POSSIBILI**

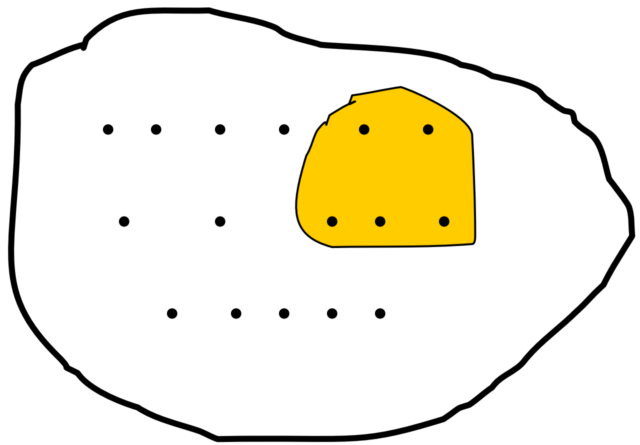
*"Tale qualifica di '**possibile**' esprime la nostra ignoranza, nel senso che, in base a quanto ci consta (di dati e di conoscenze) la detta affermazione potrebbe risultare sia vera che falsa."* (B. De Finetti, 1970)

PRIMO APPROCCIO ALLA PROBABILITA'

L'urna U_1 contiene 15 biglietti dei quali 4 danno diritto ad un premio P ; l'urna U_2 ha 16 biglietti di cui 5 danno diritto allo stesso premio P . Da quale urna conviene estrarre un biglietto?



U_1



U_2

INSIEMI

↓

FRAZIONI

↓

PROBABILITA'

DEFINIZIONI DI PROBABILITA’

PROBABILITA’

- **CLASSICA**
- **FREQUENTISTA**
- **GEOMETRICA**
- **SOGGETTIVISTA**
- **ASSIOMATICA**

PROBABILITA' CLASSICA

Definizione classica di probabilità :

$$P(A) = \frac{numero\ casi\ \ favorevoli}{numero\ casi\ \ possibili} = \frac{m}{n} \longleftarrow \quad \text{a priori}$$

- Sottintende il concetto di eventi elementari'equiprobabili' (circolo vizioso)
- Ambito ristretto di applicazione

PROBABILITA' CLASSICA esempi

LA SCELTA DELLA PRINCIPESSA

Una principessa vuole scegliere lo sposo più bello tra 3 pretendenti sconosciuti, che si presentano uno dopo l'altro: quello rifiutato verrà eliminato. Come può fare per scegliere il meglio possibile? (vd [1])

oppure:

LE TRE BUSTE

In un gioco TV un concorrente riceve 3 buste chiuse contenenti ciascuna un diverso premio in denaro; sceglie e apre una busta: se accetta il premio il gioco finisce, altrimenti apre un'altra busta e così via. Qual è la strategia per ottenere il miglior premio? (vd [1])

PROBABILITA' CLASSICA
esempi

- Sceglie uno a caso: la probabilità è 1/3 .
- Rifiuta il 1° ; se il 2° è meglio del 1° prende questo, altrimenti prende l'ultimo. La probabilità è 1/2 . Infatti vi sono 6 casi:

Be Me Br	sceglie il 3°
Be Br Me	sceglie il 3°
Me Be Br	sceglie il 2°
Me Br Be	sceglie il 3°
Br Be Me	sceglie il 2°
Br Me Be	sceglie il 2°
1° 2° 3°	

3 casi favorevoli su 6 possibili

PROBABILITA' CLASSICA esempi

QUATTRO CARTE

Un mazzo è fatto da 4 carte: asso di picche AP, asso di cuori AC, fante di quadri FQ, due di fiori 2F. Tizio pesca due carte, le guarda e dichiara di avere un asso.

Qual è la probabilità che abbia un altro asso?

Se Tizio dichiara anche di avere AP, qual è la probabilità che abbia l'altro asso? (vedi [6])

(Henry Whitehead, Oxford, 1939)

PROBABILITA' CLASSICA
esempi

AP AC ← unico caso favorevole su 5 possibili

AP FQ

AP 2F $P(E_1) = 1/5$

AC FQ

AC 2F

AP AC ← unico caso favorevole su 3 possibili

AP FQ $P(E_2) = 1/3$

AP 2F

PROBABILITA' FREQUENTISTA

Definizione frequentista di probabilità :

$$P(A) = \frac{numero\ successi}{numero\ totale\ prove}$$, su tante prove

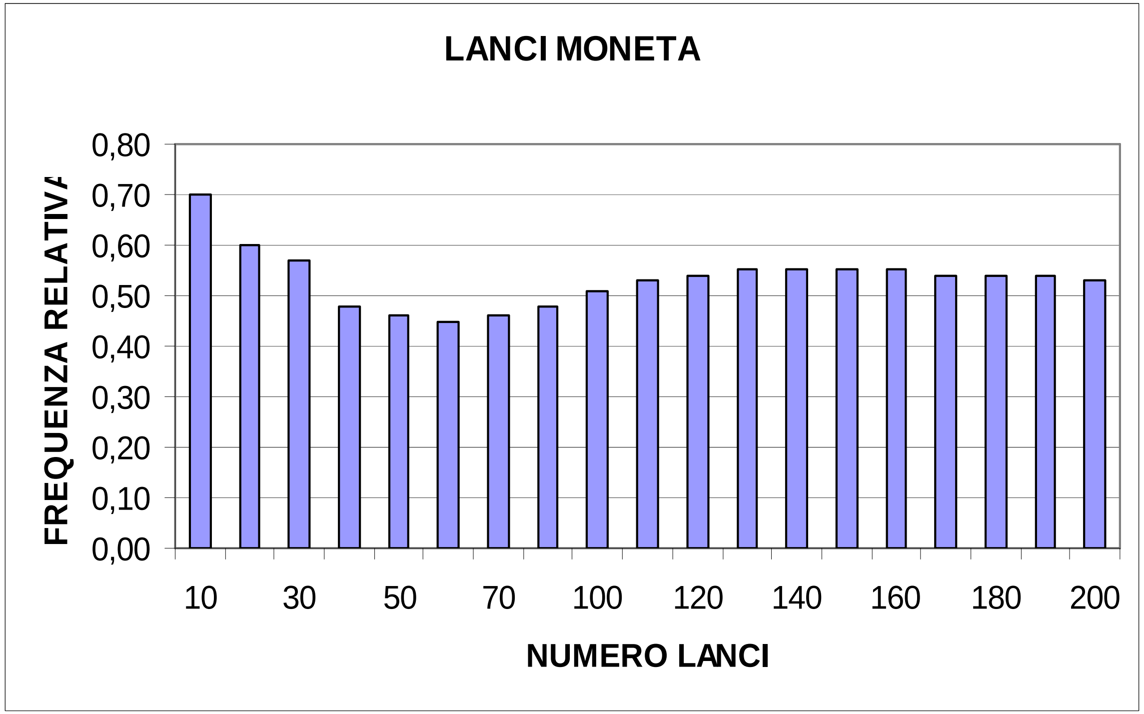
a posteriori

- E' la **frequenza relativa** di A su **molte prove**
- Sottintende la **legge empirica del caso**:
  all'aumentare del numero delle prove la frequenza relativa tende alla probabilità.

PROBABILITA' FREQUENTISTA esempi

Uso dell'esperimento (lanci di una moneta o di un dado, estrazioni della tombola,…): legame probabilità-realtà.

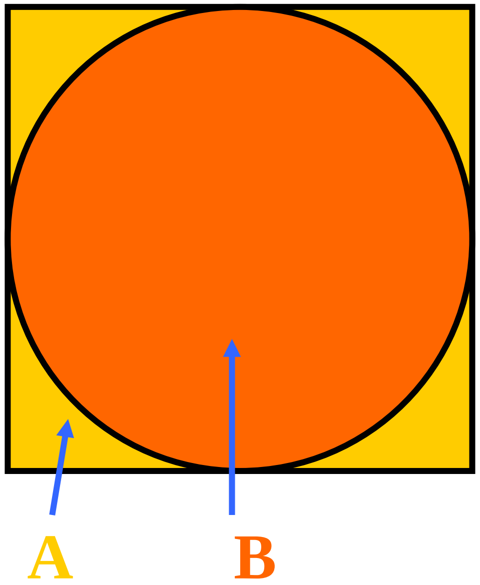
Lanciare 200 volte una moneta (o un dado) e annotare quante volte esce testa nei primi 10, 20,…, 200 lanci, con relativo diagramma.



PROBABILITA' GEOMETRICA

Definizione geometrica di probabilità

$$P(A) = \frac{area\ utile}{area\ totale} = \frac{S}{S_T}$$



TIRO AL BERSAGLIO

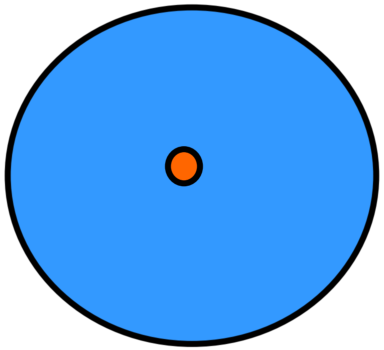
Qual è la probabilità che un tiratore centri la zona **B** supponendo che comunque centri la zona **A**?

$$P(E) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \cong 0,785$$

PROBABILITA' GEOMETRICA esempi

NUCLEO ATOMICO

Noti i risultati di esperimenti tipo quelli di Rutherford e il raggio Ra dell'atomo, stimare il raggio Rn del nucleo atomico.



Ra $\sim 10^{-10}$ m raggio atomico

p $\sim 10^{-5}$ probabilità che una particella α sia molto deviata dal foglietto d'oro

10^3 numero di strati atomici presenti nel foglietto d'oro

p' $\sim 10^{-8}$ probabilità che una particella α sia deviata da un atomo del foglietto

p' = **area sezione nucleo** / **area sezione atomo** ; da cui:

$$Rn = \sqrt{Ra^2 \cdot p'} \approx \sqrt{10^{-20} m^2 \cdot 10^{-8}} \approx 10^{-14} m$$

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

Definizione soggettivista di probabilità (De Finetti)

$$P(A) = \frac{somma\ che\ si\ accetta\ di\ pagare}{somma\ che\ si\ vince\ se\ accade\ A}$$

- E' "*la* ***massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere*** *a fronte di una vincita lorda unitaria*"

- *"...la probabilità che qualcuno attribuisce alla verità - o al verificarsi - di un certo evento altro non è che la* ***misura del grado di fiducia*** *nel suo verificarsi"* (De Finetti, 1969)

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

Nel dettaglio:

- Tizio punta (scommette) la somma pS
- se l'evento E si verifica Tizio vince S
- la **probabilità** dell'evento E è $p = pS / S$
- in particolare, se $S = 1$ allora $p = pS$
- se si verifica E, il **guadagno** di Tizio è $G = (1-p)S$
- se non si verifica E, Tizio ha una **perdita** $G' = -pS$
- poiché $G \cdot G' \leq 0$ risulta: $-p(1-p)S^2 \leq 0$
- ovvero: $0 \leq p \leq 1$

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA esempi

SCOMMESSE E CAVALLI

La probabilità di vittoria di un cavallo è 0,2. Lo scommettitore Tizio punta 30 E sul cavallo. In caso di vittoria quanto guadagna?

S = pS / p = 30 E / 0,2 = 150 E . Tizio guadagna: G = (150–30) E

PROBABILITA' SOGGETTIVISTA

"*La probabilità non esiste*" (De Finetti, 1930): non esiste una probabilità determinabile fuori dal soggetto. L'oggettività viene recuperata all'interno della visione soggettivista.

La trattazione teorica soggettivista è rigorosa ed assume un'impostazione assiomatica (De Finetti: "Teoria delle probabilità",1970).

PROBABILITA' ASSIOMATICA

Definizione assiomatica di probabilità (Kolmogorov)

Dato l'insieme $S \neq \emptyset$ (spazio dei risultati o universo) e

l'insieme $E \subseteq P(S)$ tale che:

evento unione o somma

evento intersezione o prodotto

i. $S \in E$

ii. se $A, B \in E$ allora A' , B' , $A \cup B$, $A \cap B \in E$

Gli elementi di E si dicono **eventi**, E si dice campo degli eventi (o σ-algebra o campo di Borel).

N.B. A' è il complementare di A rispetto a S (evento contrario)

PROBABILITA' ASSIOMATICA

Esiste una funzione P , detta **probabilità**, che associa all'evento A $\in$ E un numero reale P(A) tale che:

A1. $P(A) \geq 0$

A2. $P(S) = 1$ ***eventi incompatibili***

A3. se $A \cap B = \varnothing$ allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A4. *se* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in E$, *con* $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j,$

$$allora: \quad P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

TEOREMI SULLA PROBABILITA'

Dagli assiomi seguono vari **teoremi**: ***evento contrario***

$T1.\ P(\emptyset)=0$

$T2.\ P(A')=1-P(A)$

$T3.\ se\ A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

$T4.\ P(A)\in[0,1]$

$T5.\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$T6.\ se\ A_1,A_2,\dots,A_n\in E, A_i\cap A_j=\emptyset\quad \forall i\neq j, \bigcup_{i=1}^{n}A_i=S\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$$

$$e\ se\ P(A_i)=P(A_j)\ \forall i,j\Rightarrow P(A_i)=\frac{1}{n}\ \ e\ se\ \ A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i\Rightarrow P(A)=\frac{m}{n}$$

definizione classica di probabilità

PROBABILITA' CONDIZIONATA

Probabilità condizionata :

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

da cui: $P(A \cap B)$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

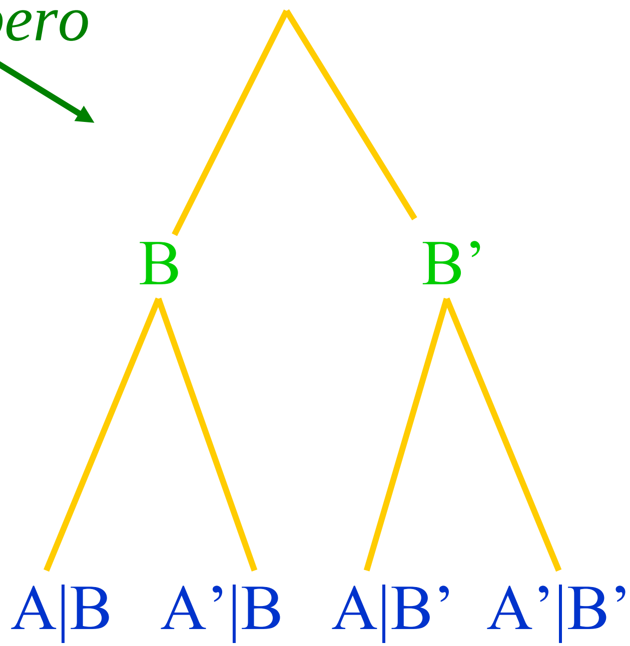
Se A e B sono **eventi indipendenti**:

$$P(A|B) = P(A)\, ,\, P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

diagramma ad albero



TEOREMI SULLA PROBABILITA' esempi

UN PROBLEMA POSTO A PASCAL

E' più probabile ottenere almeno un '6' lanciando 4 volte un dado o ottenere almeno un '12' lanciando 24 volte due dadi?

(Antoine Gombaud, Chavalier de Mèré a Blaise Pascal)

Uso dell'evento contrario (complementare) e dell'evento prodotto

A: esce il '6' con un lancio , A': non A , P(A') = 5/6

B: esce il '12' con un lancio , B': non B , P(B') = 35/36

C: non esce il '6' su 4 lanci, C': non C , P(C') = $1-(5/6)^4 \sim 0{,}52$

D: non esce il '12' su 24 lanci, D': non D, P(D')=$1-(35/36)^{24} \sim 0{,}49$

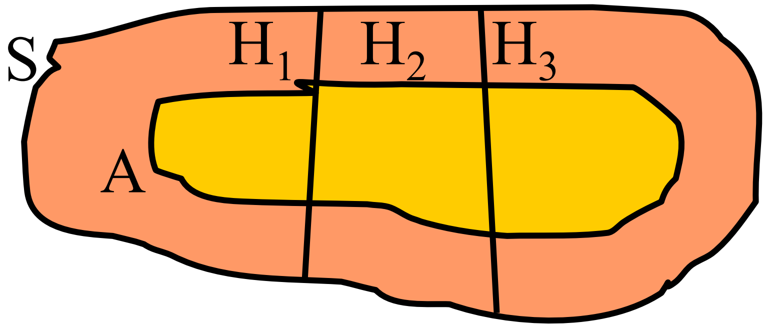
N.B. *Si poteva usare la distribuzione binomiale*

TEOREMA DI BAYES

$$Se\ \ S=\bigcup_{i=1}^{n} H_i\ ,\ H_i \cap H_j=\varnothing\ \ \forall i\neq j\ ,\ A\subseteq S\ allora$$

$$P(H_k\mid A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A\mid H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A\mid H_i)}\ \ ,\ \ k=1,2,\ldots,n$$

P(A) ***probabilità totale***



L'ipotesi H_k è formulata prima di A . Sono note $P(H_k)$ (probabilità **a priori**) e P(A); il teorema di Bayes fornisce la probabilità **a posteriori** $P(H_k|A)$.

Inferenza bayesiana

TEOREMA DI BAYES
esempi

TESTA E CROCE

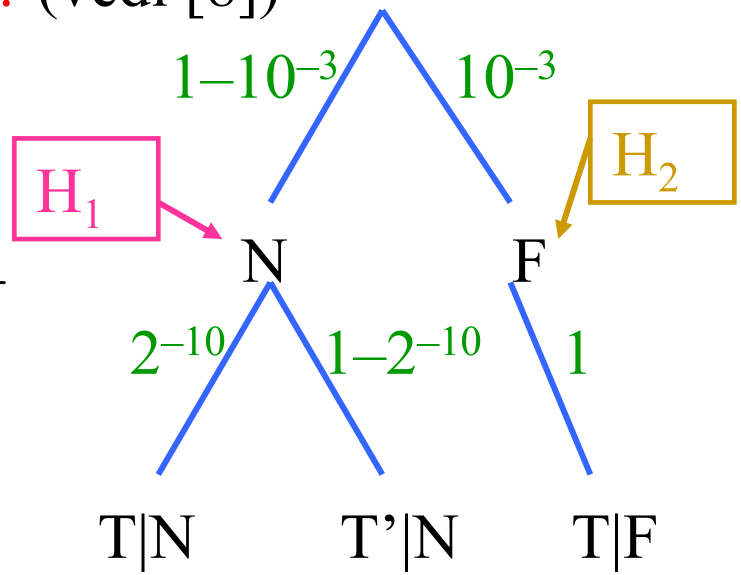
Tra 1000 monete 999 sono regolari e una è falsa (dà sempre testa). Qual è la probabilità che una moneta estratta a caso sia quella falsa se, lanciata per 10 volte, dà sempre testa? (vedi [8])

N: moneta normale, F: moneta falsa

T: esce testa 10 volte, T': non T

$$P(F \mid T) = \frac{P(F) \cdot P(T \mid F)}{P(F) \cdot P(T \mid F) + P(N) \cdot P(T \mid N)}$$

$$P(F \mid T) = \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 2^{-10} \cdot (1 - 10^{-3})} \cong 50,62\%$$



VARIABILI ALEATORIE

Dato l'insieme $S \neq \emptyset$ e il campo degli eventi $E \subseteq P(S)$ si dice **variabile aleatoria** (o casuale) X una funzione

$X : E \to \mathbf{R}$, $X(A) = x$ (si scrive anche $X = x$)

X si dice **discreta** se assume un numero **finito** o **numerabile** di valori; cioè:

$X(A_1) = x_1$, $X(A_2) = x_2$,…, $X(A_n) = x_n$,... essendo

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \,, \quad \sum_i P(A_i) = \sum_i p_i = 1$$

Altrimenti X si dice **continua**.

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Si scrive anche: $P(A_i) = P(X = x_i) = p_i = f(x_i)$

Ovviamente: $p_i = f(x_i) \in [0,1]$. La funzione f si dice **funzione (o legge o distribuzione) di probabilità** della variabile aleatoria X . Quindi $P = f \circ X$

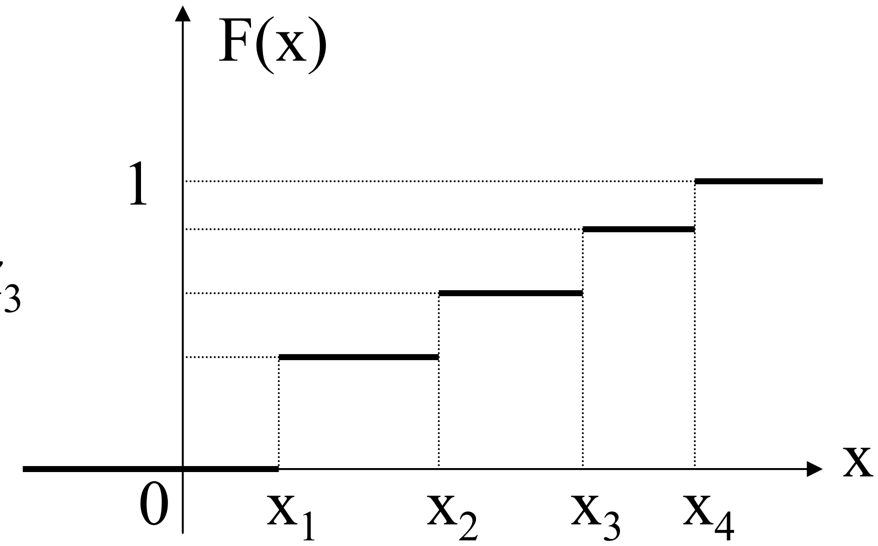
$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "X"'] & & {[0,1]} \\
& C_X \subseteq \mathbf{R} \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

X variabile casuale discreta. F si dice **funzione di ripartizione** di X se $F : \mathbf{R} \to [0,1]$, $F(x) = P(X \leq x)$.

Se X è discreta e $C_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ risulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad se\ x < x_1 \\ p_1 \quad , \quad se\ x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2\ ,\ se\ x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots. \\ 1 \quad , \quad se\ x \geq x_n \end{cases}$$



VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Per una variabile aleatoria discreta X definiamo:

- **speranza matematica** (o media o valor medio)

$$M(X) = m_X = E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$$

- **varianza**

$$V(X) = \sigma^2(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - m_X)^2 \cdot p_i$$

- **scarto quadratico medio** (o deviazione standard)

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Proprietà di speranza e varianza di X (a, b $\in$ **R**)

- $V(X) = M[(X - m_X)^2]$
- $V(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$
- $M(a \cdot X + b) = a \cdot M(X) + b$
- $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$

$$X^2 \begin{cases} x_1^2 & x_2^2 \; \dots \; x_n^2 \; \dots \\ p_1 & p_2 \; \dots \; p_n \; \dots \end{cases}$$

$$aX + b \begin{cases} ax_1 + b & ax_2 + b & \dots. & ax_n + b & \dots. \\ p_1 & p_2 & \dots. & p_n & \dots. \end{cases}$$

VARIABILE STANDARDIZZATA

Si dice **variabile standardizzata** della variabile X la variabile aleatoria Z così definita:

$$Z = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)}$$

Si nota subito che Z è adimensionale.

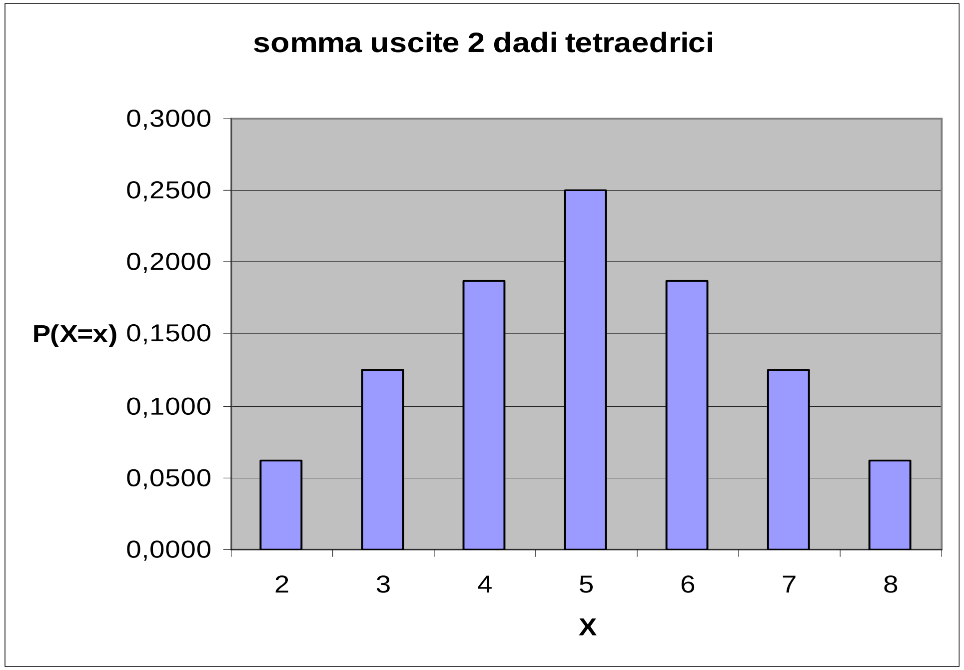
A che cosa serve Z ? E' facile provare che:

$M(Z) = 0$, $V(Z) = \sigma(Z) = 1$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE esempi

Studia le variabili aleatorie che danno la somma X e il prodotto Y delle uscite nel lancio di 2 dadi regolari tetraedrici.

X	P(X=x)
2	0,0625
3	0,1250
4	0,1875
5	0,2500
6	0,1875
7	0,1250
8	0,0625



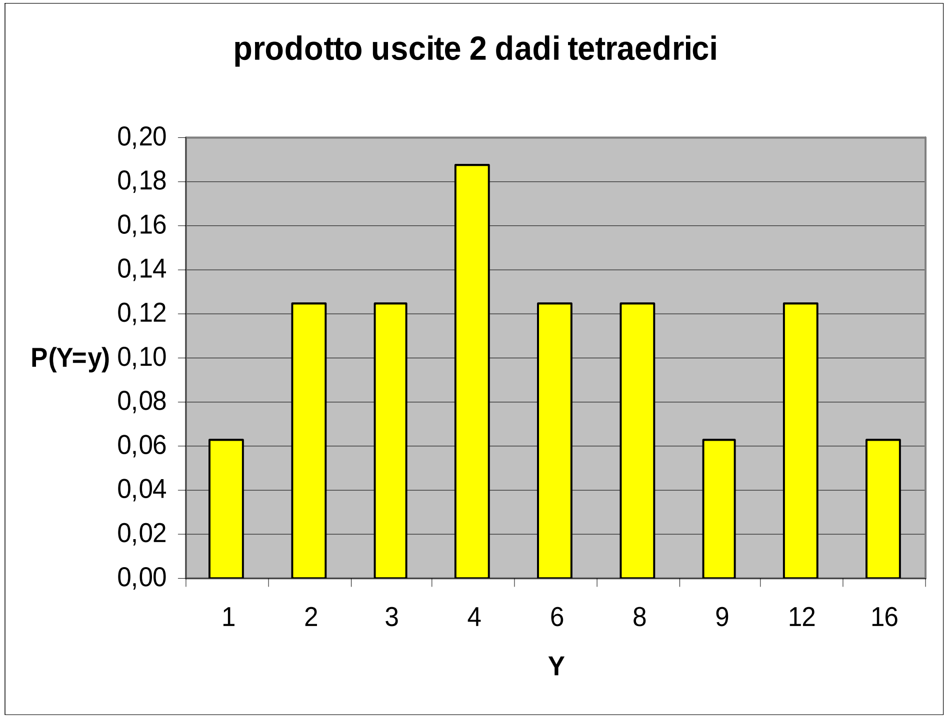
$M(X)=5$

$V(X)=11/4=2{,}75$

$\sigma(X)\cong 1{,}66$

VARIABILI ALEATORIE DISCRETE esempi

Y	P(Y=y)
1	0,0625
2	0,1250
3	0,1250
4	0,1875
6	0,1250
8	0,1250
9	0,0625
12	0,1250
16	0,0625

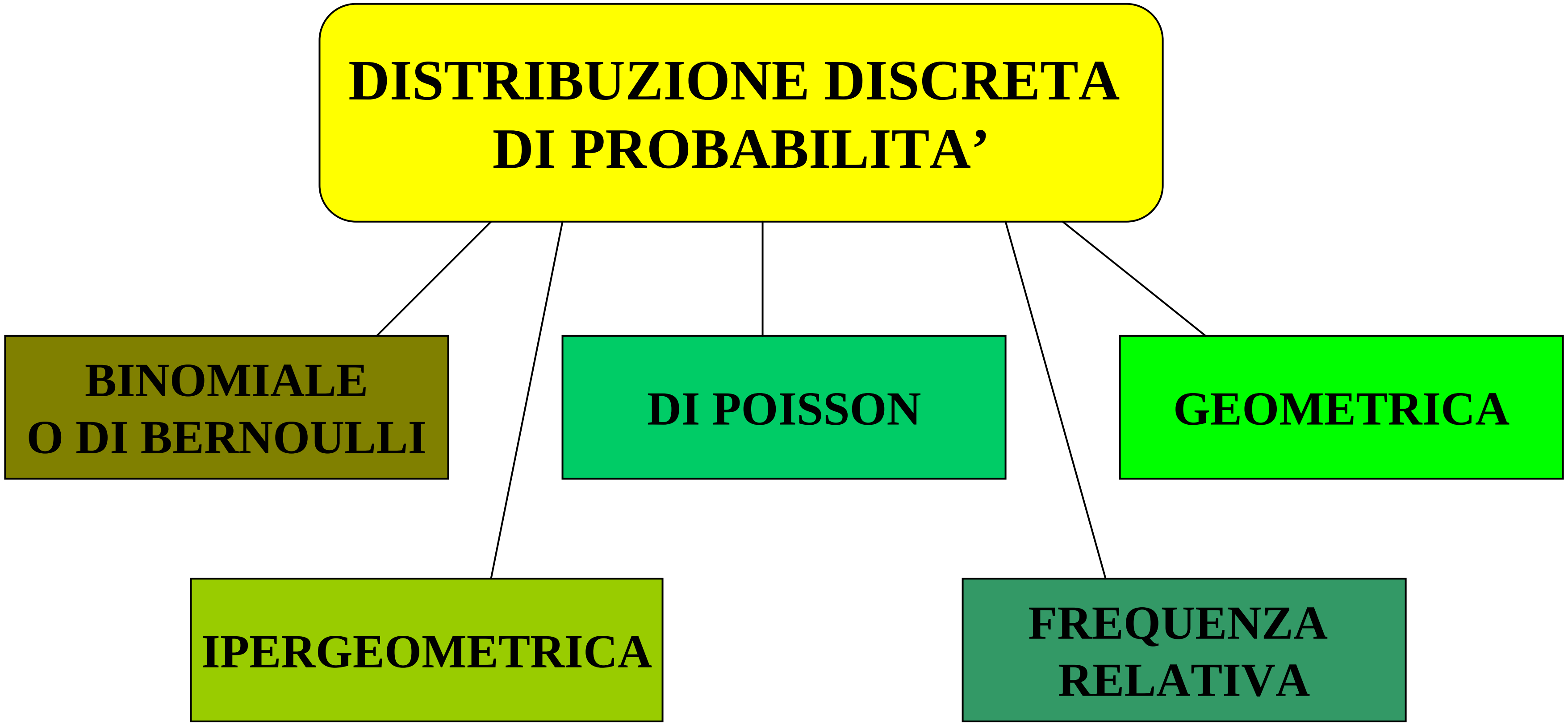


$M(Y)=25/4 = 6,25$

$V(Y)=165/9 \cong 18,3$

$\sigma(Y) \cong 4,28$

ALCUNE DISTRIBUZIONI DISCRETE DI PROBABILITA'



DISTRIBUZIONE BINOMIALE O BERNOULLIANA

L'evento A (successo) ha P(A) = p costante. Posto P(A') = q (ovviamente q = 1 – p), la variabile X dà il numero di successi di A su n prove. X ha la distribuzione **binomiale** o di **Bernoulli** di probabilità:

$$f(x) = p_x = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ , } con\ x = 0, 1, \ldots, n$$

Risulta: M(X) = n p , V(X) = n p q .

n , p si dicono parametri della bernoulliana.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE esempio

LANCI DI UN DADO TETRAEDRICO

X: n° di uscite ‘3’ su n = 10 lanci

P(A) = p = 0,25; q = 0,75

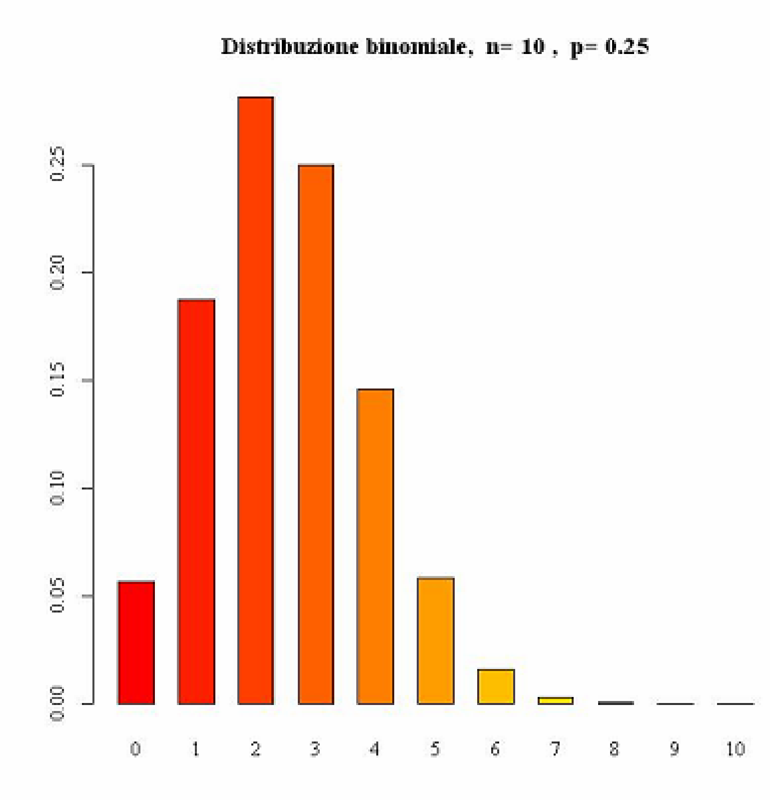
M(X) = np = 2,50

V(X) = npq ≅ 1,88 ; σ ≅ 1,37

$$P(3 \leq X < 5) =$$

$$= \binom{10}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^7 + \binom{10}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^6 \cong$$

$$\cong 0,25028 + 0,14600 \cong 39,63\%$$



DISTRIBUZIONE BINOMIALE
Triangolo di Tartaglia-Pascal

Hexstat, Harcout, USA, 1965

$(a+b)^0$	1	$1 = 2^0$
$(a+b)^1$	1 1	$1+1= 2^1$
$(a+b)^2$	1 2 1	$1+2+1= 2^2$
$(a+b)^3$	1 3 3 1	$1+3+3+1= 2^3$
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1	$1+4+6+4+1= 2^4$
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1	$1+5+10+10+5+1= 2^5$
………...		

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\boxed{p_k}$

binomio di Newton

formula di Stifel

DISTRIBUZIONE BINOMIALE
Triangolo di Tartaglia-Pascal

Triangolo di Pascal e probabilità: lancio ripetuto di una moneta.
Ad es. su n = 5 lanci calcolare la probabilità che esca testa x = 3 volte è 10/32: 1 5 10 10 5 1 ← 5^ riga

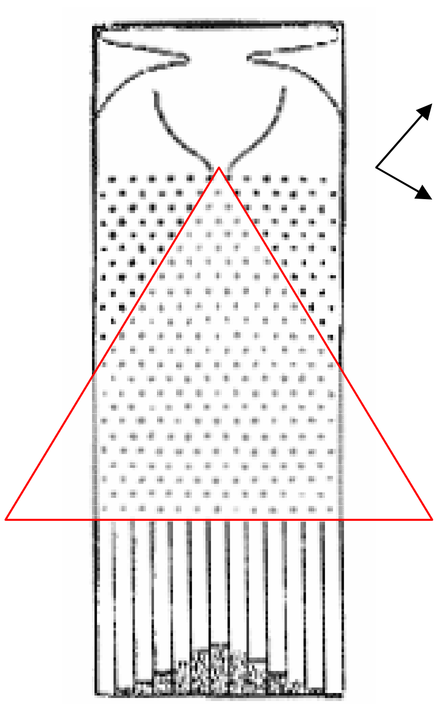
Cioè:

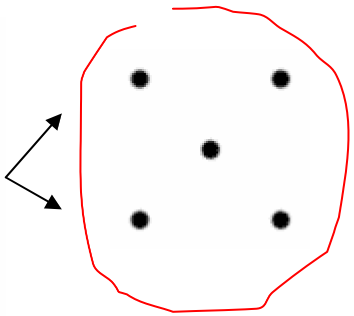
$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{32}$$

10 è il n° di tutti i possibili percorsi che, partendo dalla cima del triangolo di Pascal, portano al punto d'arrivo considerato, su un totale di 32 che arrivano sulla 5^ riga del triangolo stesso.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE
Macchina di Galton

Quincunx (quinconce) o macchina (tavola) di Galton (1877)



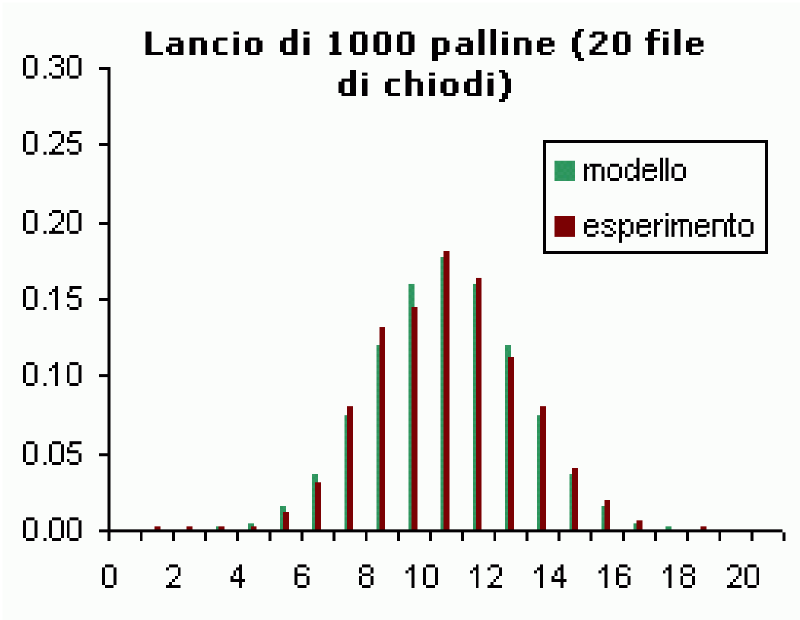


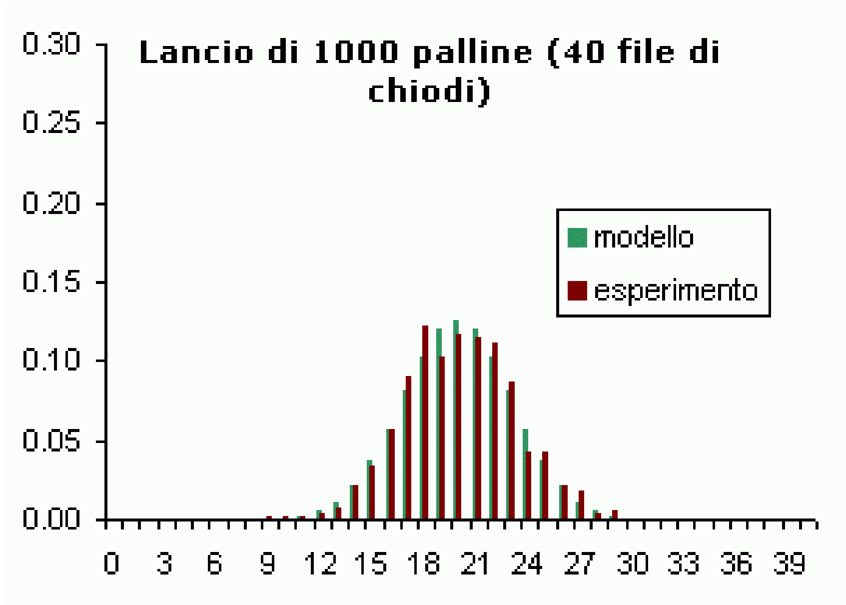
I chiodi sono disposti come il ‘5’ nel dado. Le file di chiodi che interessano sono solo quelle in cui la pallina tocca un solo chiodo, così come i chiodi e le scanalature sono solo quelli che possono far parte del percorso della pallina. La prima fila di chiodi è costituita da un solo chiodo, la seconda da due, e così via. Il numero dei chiodi nell'ultima fila è uguale al numero di file della macchina. In una macchina di Galton con *n* file di chiodi ci sono *n*+1 scanalature.

Film “*Eventi casuali*”, *La Fisica secondo il PSSC* (DVD 1), Zanichelli, BO

http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/protagonisti/galton.htm

DISTRIBUZIONE BINOMIALE
Macchina di Galton





La probabilità che la pallina cada nella k-esima scanalatura su n file di chiodi è

$$\binom{n}{k} \cdot 0,5^n$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Dato il parametro reale positivo λ , la variabile aleatoria discreta X ha distribuzione di **Poisson** se:

$$f(x) = p_x = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \; con \; x = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

Risulta: $M(X) = V(X) = \lambda$.

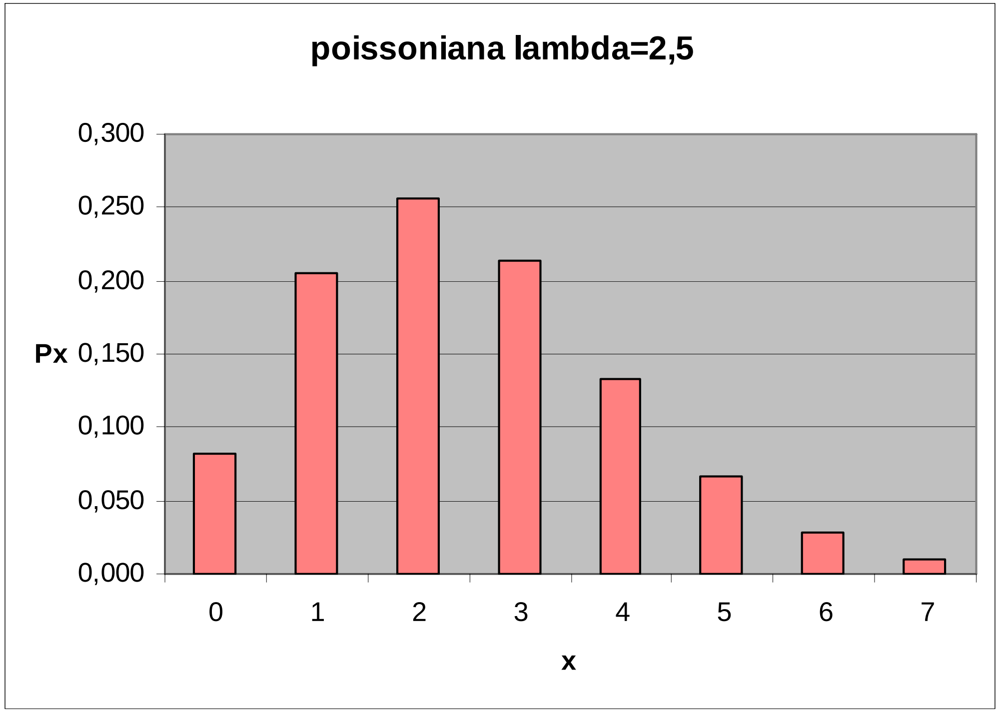
Si applica ad eventi 'rari'.

Formula di Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$

DISTRIBUZIONE DI POISSON esempi

Distribuzione di Poisson $\lambda = 2,5 = M(X) = V(X)$

x	Px
0	0,08208
1	0,20521
2	0,25652
3	0,21376
4	0,13360
5	0,06680
6	0,02783
7	0,00994



DISTRIBUZIONE DI POISSON esempi

AL SOCCORSO STRADALE

Al soccorso stradale arrivano in media 48 chiamate al giorno, due in media all'ora, secondo una distribuzione di Poisson.

a) Calcola la probabilità che nella 1^ora arrivino almeno 2 chiamate.

b) Calcola la probabilità che il tempo di attesa fino alla 1^ chiamata sia di almeno un'ora. *(Mat. Scient. PNI 1996, sess. suppl.)*

CONTROLLO DI QUALITA'

Una ditta produce in media l'8% di pezzi difettosi. Qual è la probabilità che su un campione di 10 pezzi si trovi più di un pezzo difettoso?

DISTRIBUZIONE DI POISSON esempi

X: numero di chiamate in un'ora. $M(X) = \lambda = 2$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} \cong 59{,}4\%$

b) Equivale a: 'nella 1^ ora non giungono chiamate', cioè:

$P(X=0) = e^{-2} \cong 13{,}5\%$

X: numero di pezzi difettosi prodotti.

$P = 0{,}08$, $q = 0{,}92$, $n = 10$, $M(X) = \lambda = np = 0{,}8$ (<u>poissoniana</u>)

$P(X>1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-0{,}8}/0! - e^{-0{,}8} \cdot 0{,}8/1! \cong 19{,}1\%$

Con la <u>binomiale</u>: $P(X>1) \cong 18{,}8\%$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

X è una variabile aleatoria con distribuzione **geometrica** se fornisce il numero delle prove da effettuare per ottenere il 1° successo di un evento A in cui P(A) = p.

$$f(x) = p_x = P(X = x) = pq^{x-1}, \; con \; x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Risulta: M(X) = 1 / p , V(X) = q / p , con q = 1 – p .

L'unico parametro della distribuzione è p .

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA esempi

TIRARE UN DADO

Calcola la probabilità che, tirando un dado, il 6 esca:

a) per la prima volta tra il 3° e il 5° lancio inclusi;

b) per la prima volta in uno dei primi 5 lanci, non importa quando;

c) una sola volta su 5 lanci, non importa quando.

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA esempi

X: n° di lanci per ottenere 6 per la prima volta, p = 1/6, q = 5/6.

a) $P(3 \leq X \leq 5) = pq^2 + pq^3 + pq^4 =$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 29,3\%$$

b)

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= p + pq + pq^2 + pq^3 + pq^4 \cong 59,8\%$$

c) $P(A) = pq^4 + pq^4 + pq^4 + pq^4 + pq^4 =$

$$= 5pq^4 = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 40,2\%$$

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

Popolazione di N individui: *a* hanno un certo carattere, b = N - *a* non lo hanno. Su n individui **estratti in blocco** , la v.a. **ipergeometrica** X fornisce il numero di quelli col carattere dato. Quindi X = 0, 1,…, n ; 0 ≤ x ≤ n ≤ N=*a*+b

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \cdot \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad con \quad p = \frac{a}{N}, q = \frac{b}{N}$$

$$M(X) = np = \frac{na}{N} \quad , \quad V(X) = \frac{npq(N-n)}{N-1}$$

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA esempi

ESTRAZIONI DA UN'URNA

Un'urna contiene 4 palline rosse e 6 bianche. Determina la probabilità di avere 3 palline bianche su 5 estratte in blocco (senza reinserimento).

Si ha: $a = 6$; b = 4; n = 5; N = 10; dunque:

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21} \cong 46,6\%$$

casi favorevoli

casi possibili

DISTRIBUZIONE DELLA FREQUENZA RELATIVA

X / n è la **frequenza relativa** di successo, su n prove, di un evento di probabilità fissa p , su una popolazione ampia N.

X = 0 ,1, 2,…, n; la speranza è: *M(X) = p* .

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad V(X) = \frac{pq}{n}$$

estrazione con reinserimento (bernoulliana)

$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad V(X) = \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

estrazione in blocco

DISTRIBUZIONE DELLA FREQUENZA RELATIVA esempi

CONSUMATORI

La frazione di consumatori di un certo prodotto è 0,6. Si estrae da una popolazione di 100 individui un campione di 5 unità: calcolare la probabilità che tra gli estratti vi sia un consumatore.

p = 0,6 ; q = 0,4 ; n = 5 ; N = 100 ; allora:

$$P(X=1)=\binom{5}{1}0,6^1\cdot 0,4^4\cong 7,68\%$$

se l'estrazione è bernoulliana

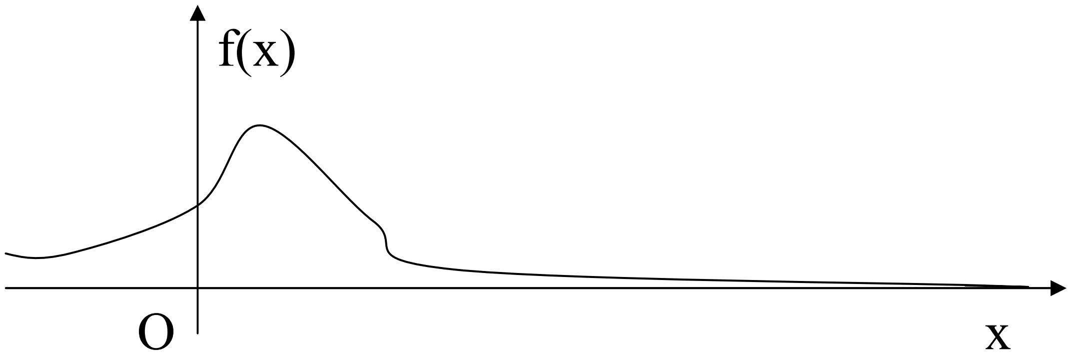
$$P(X=1)=\frac{\binom{60}{1}\cdot\binom{40}{4}}{\binom{100}{5}}\cong 7,28\%$$

se l'estrazione è in blocco (senza reinserimento)

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

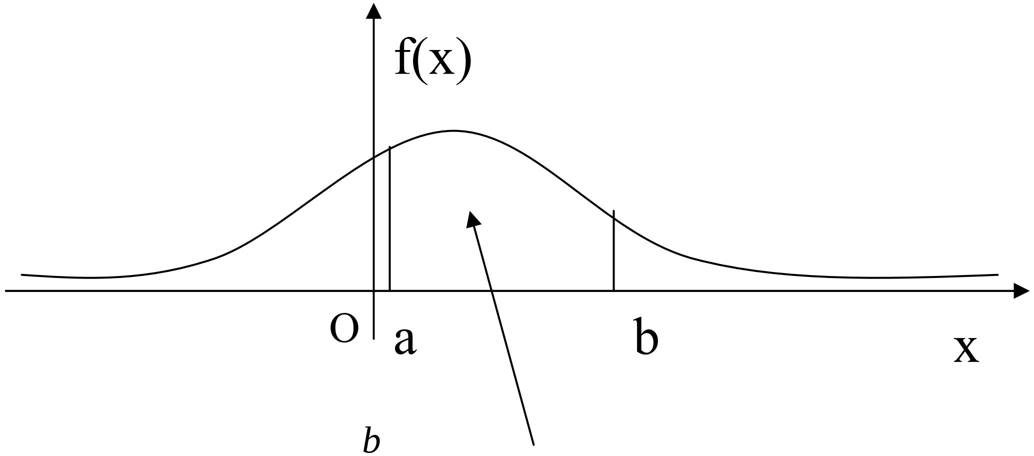
La funzione f(x) è la **densità di probabilità** della variabile aleatoria continua X se:

$$i)\ f(x) \geq 0\ \forall x \in C_X \subseteq \boldsymbol{R} \quad ; \quad ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

La **probabilità** che X assuma valori tra a e b è:

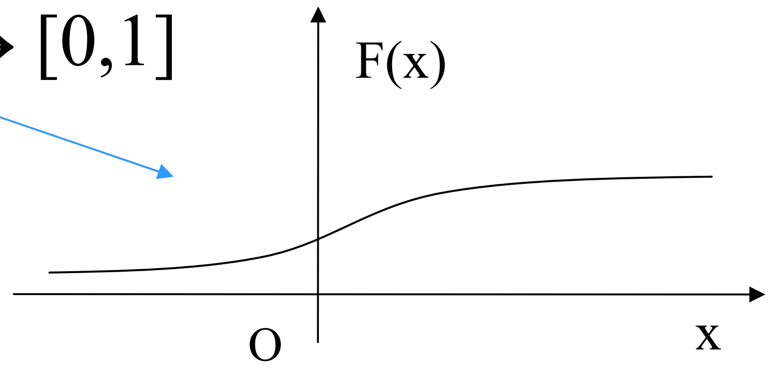


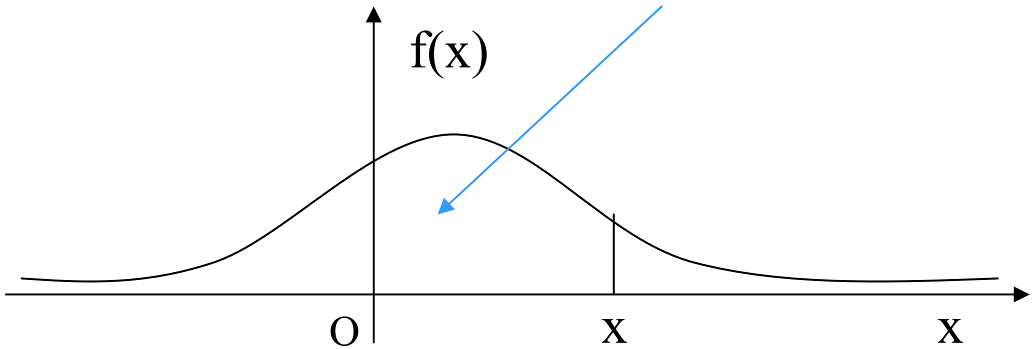
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X \le b)$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Funzione di ripartizione $F : \mathbf{R} \to [0,1]$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$





F non decresce;

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Speranza matematica (o media o valor medio):

$$M(X) = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Varianza:

$$V(X) = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x)dx$$

Scarto quadratico medio (o deviazione standard):

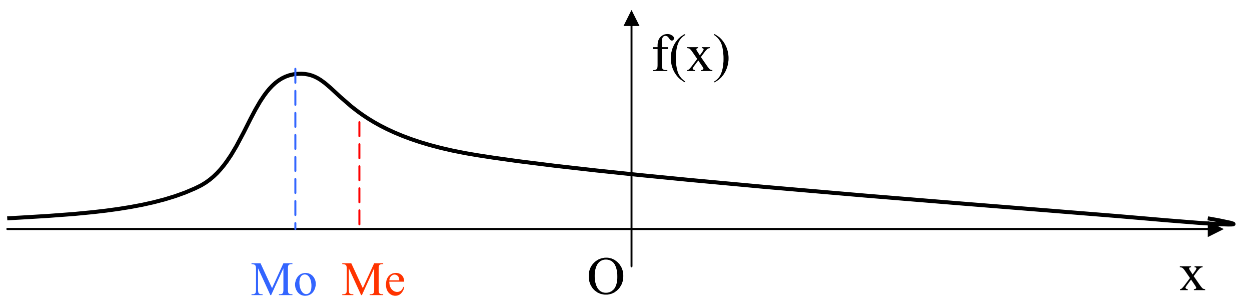
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Mediana: è il numero reale Me tale che

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Moda: è il valore Mo di X per cui f(x) è massima.

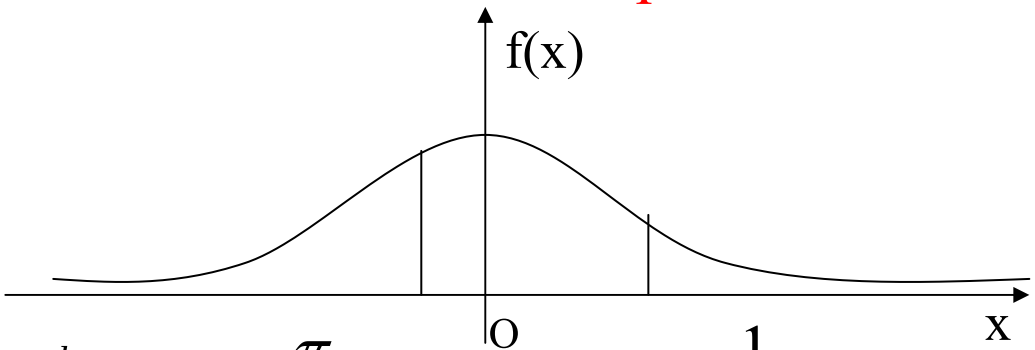


VARIABILI ALEATORIE CONTINUE esempi

DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

Per quale valore di $a > 0$ la var. al. X ha densità di probabilità:

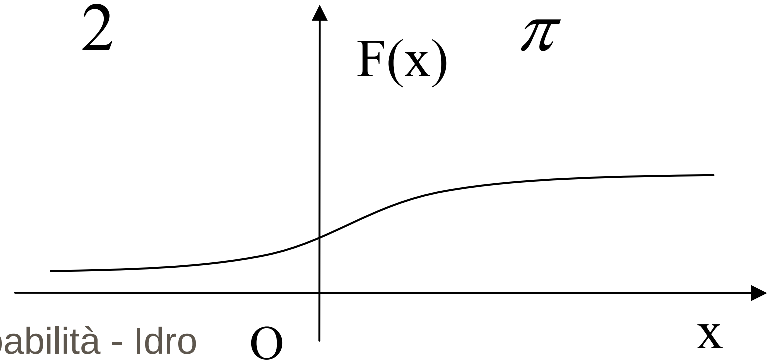
$$f(x) = \frac{a}{x^2+1} \quad ?$$



Dev'essere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2+1}dx = a \lim_{k\to+\infty}\left[arctgx\right]_{-k}^{k} = 2a\cdot\frac{\pi}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{t^2+1}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctgx$$



VARIABILI ALEATORIE CONTINUE
esempi

Rappresentano esempi di distribuzioni di probabilità le funzioni:

$$f(x) = k\sqrt{(1-x^2)^{\nu-3}} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

$$f(x) = k \cdot x^{\nu-2}(1+x^2)^{-\nu/2}$$

$$f(x) = k(1+x^2)^{-\nu/2}$$

$$f(x) = k \cdot sen^{\nu-2}x \quad , \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI PROBABILITA'

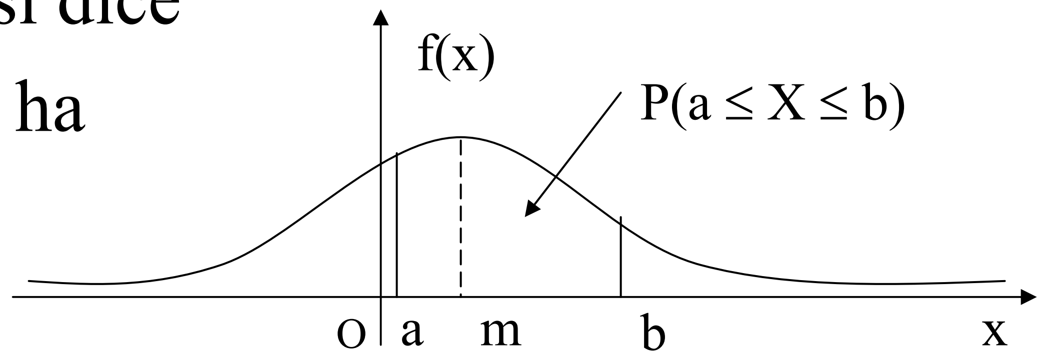
DISTRIBUZIONE CONTINUA DI PROBABILITA'

- **NORMALE O DI GAUSS**
- **t DI STUDENT**
- **CHI-QUADRO**
- **UNIFORME**
- **ESPONENZIALE**

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

La variabile aleatoria X si dice **normale** o **gaussiana** se ha densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

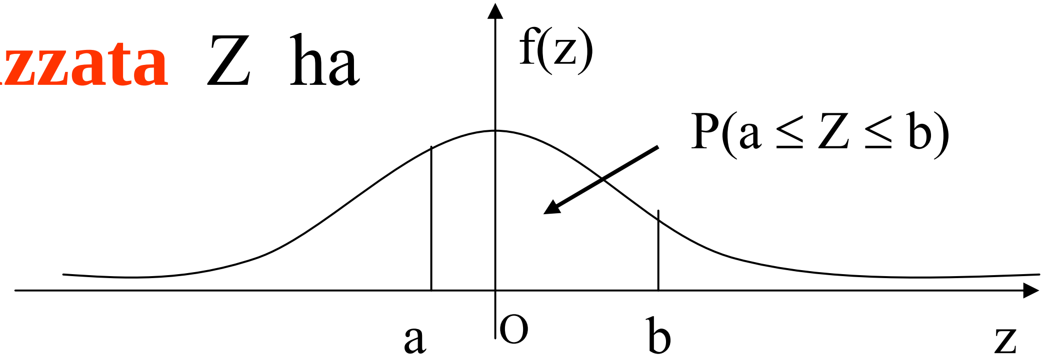


Risulta: M(X) = Me(X) = Mo(X) = m , V(X) = σ^2,

Quindi la normale ha media, moda e mediana uguali.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

La **normale standardizzata** Z ha densità di probabilità:



$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

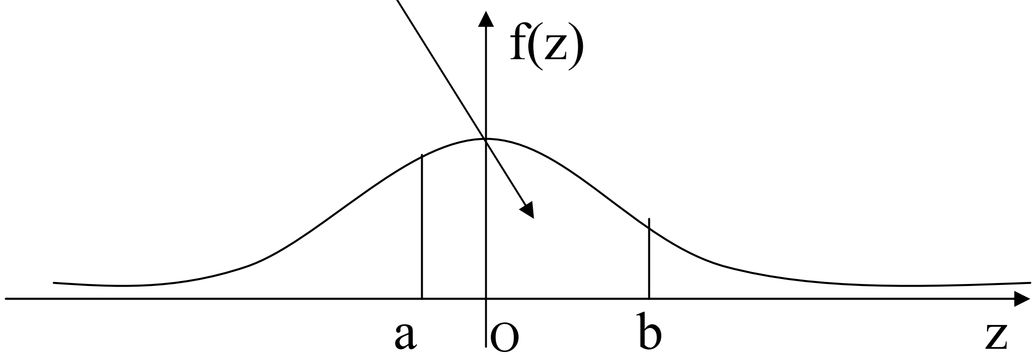
Dal risultato noto $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ segue che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

La **probabilità** risulta:

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Si usano le **tavole** per calcolare la probabilità, per $z \geq 0$.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

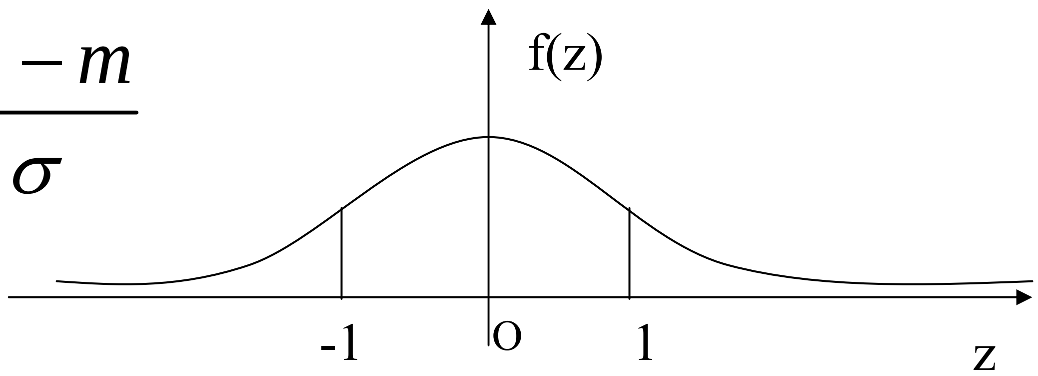
Regola dei tre sigma:

$$P(-\sigma + m < X < \sigma + m) = 2P(0 \le Z < 1) \cong 68,3\%$$

$$P(-2\sigma + m < X < 2\sigma + m) = 2P(0 \le Z < 2) \cong 95,4\%$$

$$P(-3\sigma + m < X < 3\sigma + m) = 2P(0 \le Z < 3) \cong 99,7\%$$

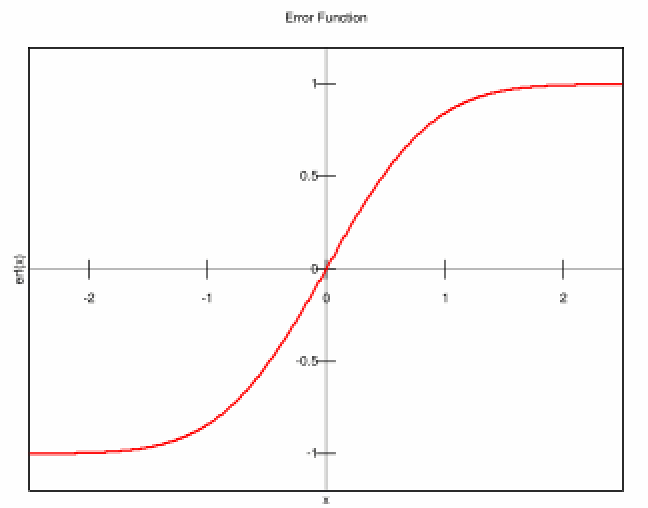
con $\quad Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$



DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA

Si definisce **funzione degli errori (di Gauss) o di Laplace**:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



Si dimostra che:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

con F **funzione di ripartizione della normale standardizzata**. La $erf(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor.

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA esempi

COMPITI IN CLASSE

In un compito il punteggio medio è 6,5 con sqm 1,5. Qual è la probabilità che un voto sia compreso tra 5 e 6? Quanti studenti avranno un tale voto se il numero totale è di 28 alunni?

ERRORI DI FABBRICA

La produzione di un pezzo da 20,0 cm presenta un errore con sqm 0,2 cm. Qual è la probabilità che la lunghezza differisca dal valore dato meno di 0,3 cm?

DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA esempi

Se i voti X sono <u>normodistribuiti</u> con: $m = 6,5$ e $\sigma = 1,5$, allora:

$P(5<X<6) = P(-1<Z<-1/3) = P(0<Z<1) - P(0<Z<1/3) \cong 0,2120.$

Il n° degli studenti con tale voto: $0,2120 \cdot 28 \cong 6$.

Se la lunghezza X è <u>normodistribuita</u> con $m = 20$ cm, $\sigma = 0,2$cm:

$P(|X-20cm| < 0,3) = P(19,7cm<X<20,3cm) = P(-1,5< Z< +1,5) =$

$= 2\cdot P(0 < Z < +1,5) \cong 2 \cdot 0,4332 \cong 86,64\%$, ove $Z=(X-m)/\sigma$.

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

La distribuzione **t di Student** ha densità di probabilità:

$$f(x) = H_\nu \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad , \quad \nu \in N$$

ove il parametro ν dà i **gradi di libertà** di T e H_ν

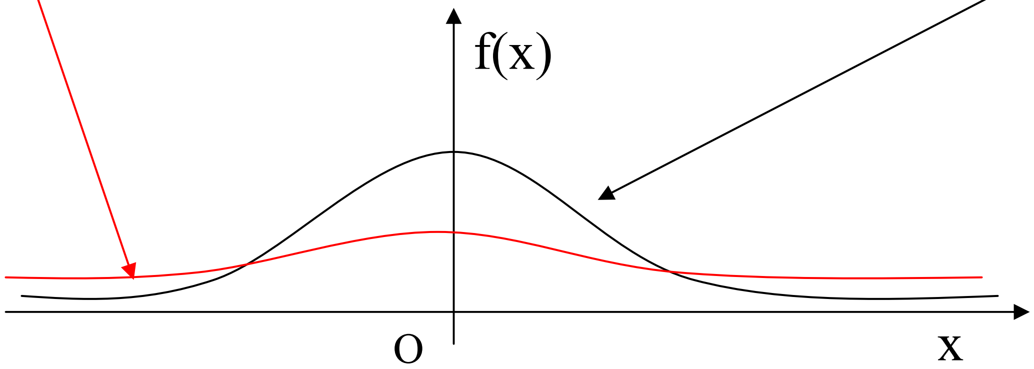
è una costante positiva che dipende da ν in modo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Risulta: $M(T) = 0 \quad , \quad V(T) = \dfrac{\nu}{\nu - 2} \quad , \quad con \ \ \nu > 2$

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

T tende alla normale standardizzata Z se $\nu \to +\infty$



La densità di T è una curva più aperta di quella di Z.

I valori della probabilità di T sono tabulati.

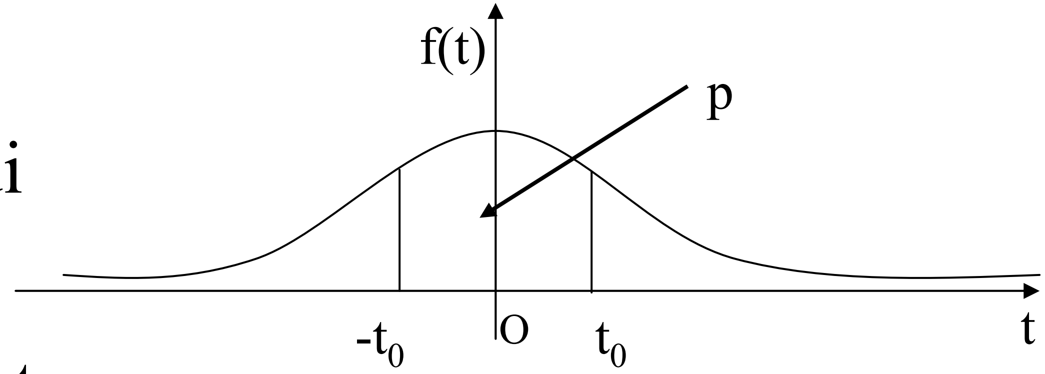
DISTRIBUZIONE t DI STUDENT

Uso delle tavole.

Forniscono, al variare di

ν , il valore di t_0 , con

$p = P(- t_0 \leq T \leq t_0)$ fissata.



Ad es. se $\nu = 15$, $p = 95\%$ allora $t_0 = 2{,}131$

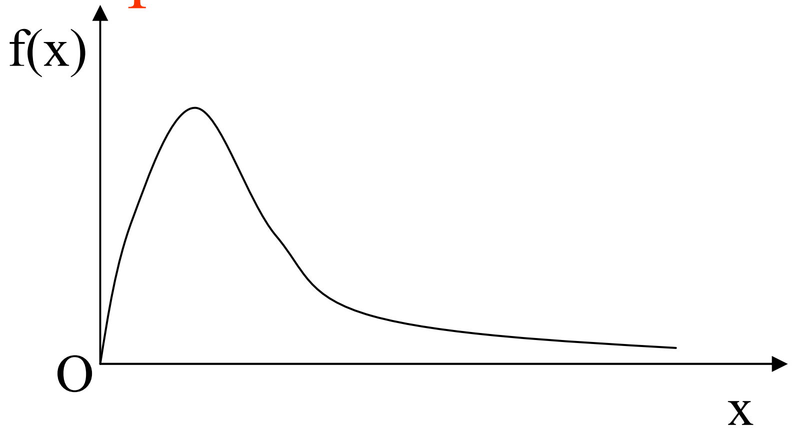
e se $\nu = 15$, $p = 90\%$ allora $t_0 = 1{,}753$.

Uso di T : in statistica per piccoli campioni.

DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO

La v. a. **chi-quadro** χ^2 ha densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} K_\nu \cdot x^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$



Il parametro $\nu \in \mathbf{N}$ esprime i **gradi di libertà** di χ^2 e K_ν è una costante positiva che dipende da ν in modo che:

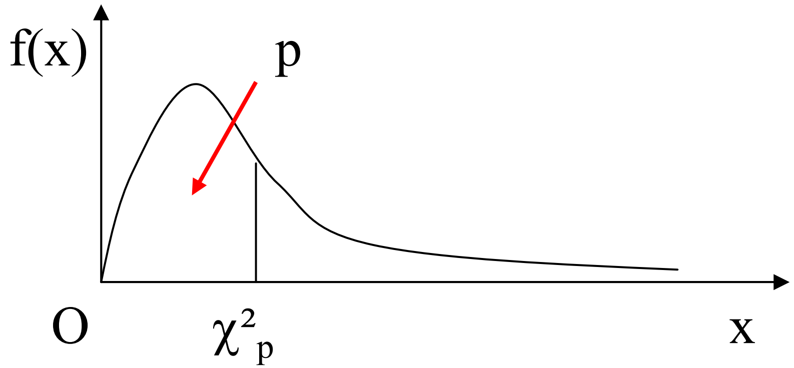
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Risulta: $M(\chi^2) = \nu \quad , \quad V(\chi^2) = 2\nu$

DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO

Uso delle tavole.

Forniscono, al variare di ν , il valore di χ^2_p , dove p è la probabilità fissata.



Ad es. se $\nu = 5$, $p = 95\%$ allora $\chi^2_p = 11{,}1$

e se $\nu = 5$, $p = 90\%$ allora $\chi^2_p = 9{,}24$.

Uso di χ^2 : confronto tra distribuzioni di frequenze osservate e di frequenze teoriche (statistica).

DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO applicazioni

TEST CHI-QUADRO: BONTA' DELL'ADATTAMENTO

Campione di n unità; i = 1, 2,…, k con $\sum_{i=1}^{k} f_i = n = \sum_{i=1}^{k} a_i$

f_i frequenze osservate (empiriche)

a_i frequenze attese (teoriche) secondo un certo modello che può presentare r parametri

gradi di libertà $\nu = k - r - 1$

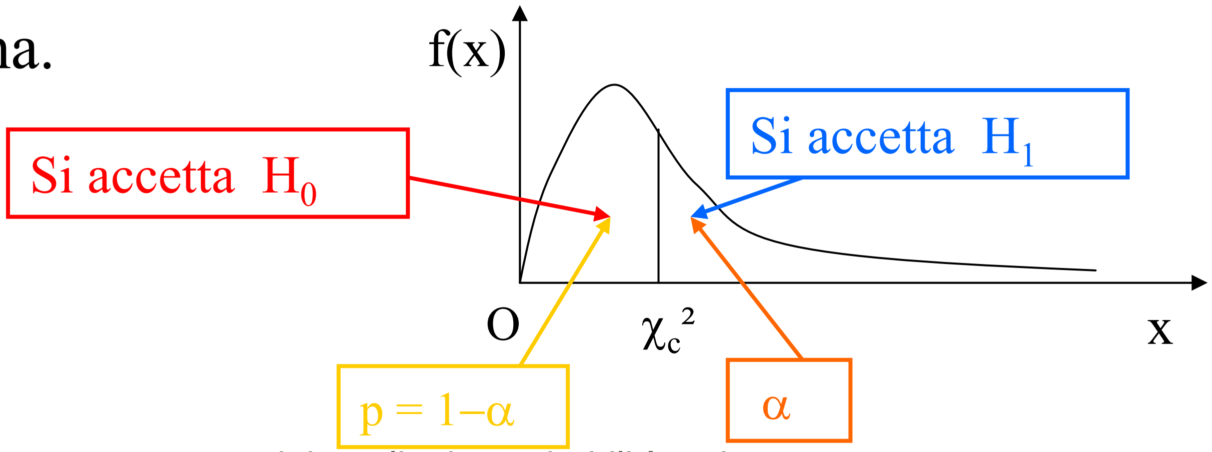
chi-quadro $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - a_i)^2}{a_i}$

DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO applicazioni

Possono presentarsi i due casi:

- $H_0 : \chi^2 < \chi_c^2$ ⟶ il modello si adatta bene (*ipotesi nulla*)
- $H_1 : \chi^2 \geq \chi_c^2$ ⟶ il modello non si adatta bene (*ip. alternativa*)

χ_c^2 si legge sulle tavole in base al livello di significatività α dato (o al livello di confidenza o di fiducia $p = 1-\alpha$) e ai gradi di libertà ν del problema.



DISTRIBUZIONE χ^2 CHI-QUADRO esempi

IL DADO E' TRUCCATO?

Stabilisci se, al livello di significatività $\alpha = 5\%$, è truccato un dado che presenta le seguenti uscite colle rispettive frequenze:

uscite	1	2	3	4	5	6
f_i	12	9	7	13	14	5
a_i	10	10	10	10	10	10

← frequenze attese

$k = 6$, $n = 60$, $\nu = 6–1 = 5$ ← gradi di libertà

dalle tavole, se $\alpha = 5\%$ e $\nu = 5$, $\chi_c^2 = 11{,}1$; il chi-quadro vale:

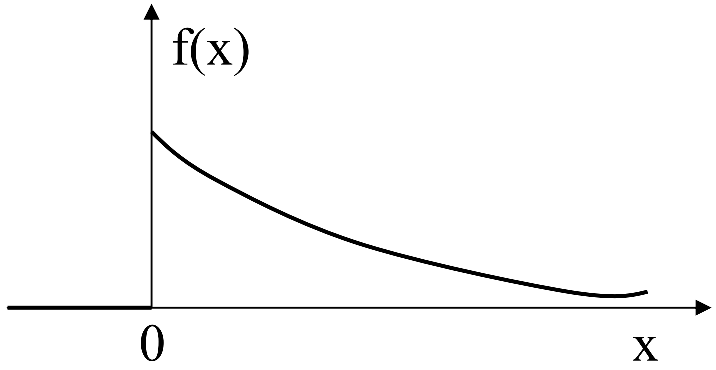
$\chi^2 = [(12\text{-}10)^2+(9\text{-}10)^2+(7\text{-}10)^2+(13\text{-}10)^2+(14\text{-}10)^2+(5\text{-}10)^2]/10 = 6{,}4$

$\chi^2 = 6{,}4 < 11{,}1 = \chi_c^2$, dunque si accetta H_0: il dado non è truccato.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE O DI POISSON

L'**esponenziale** ha densità di probabilità (parametro k>0):

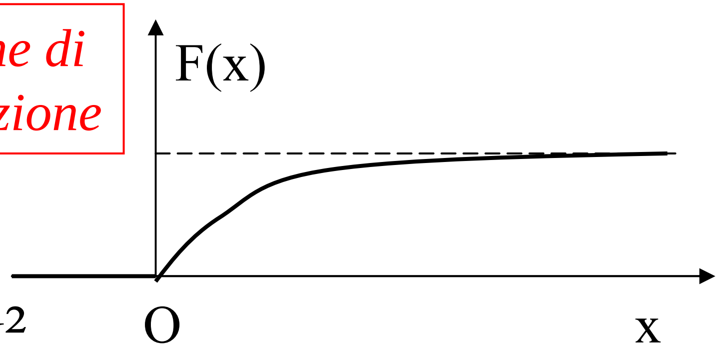
$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & , \quad se \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad se \quad x < 0 \end{cases}$$



Si dimostra che: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad se \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-kx} & , \quad se \quad x > 0 \end{cases}$$

funzione di ripartizione



Risulta: $M(X) = 1 / k$, $V(X) = 1 / k^2$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE O DI POISSON esempi

CHIAMATE AL CENTRALINO

X variabile esponenziale di parametro 2 che dà l'intervallo di tempo in minuti tra 2 chiamate consecutive ad un centralino. Calcola la probabilità che passi almeno un minuto tra ciascuna delle prime 3 chiamate.

$$P(X>1)=\int_{1}^{+\infty} 2e^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-2x}\right]_1^b=e^{-2}\cong 13,5\%$$

$$P(A)=\left[P(X>1)\right]^3\cong 0,135^3\cong 0,246\%$$

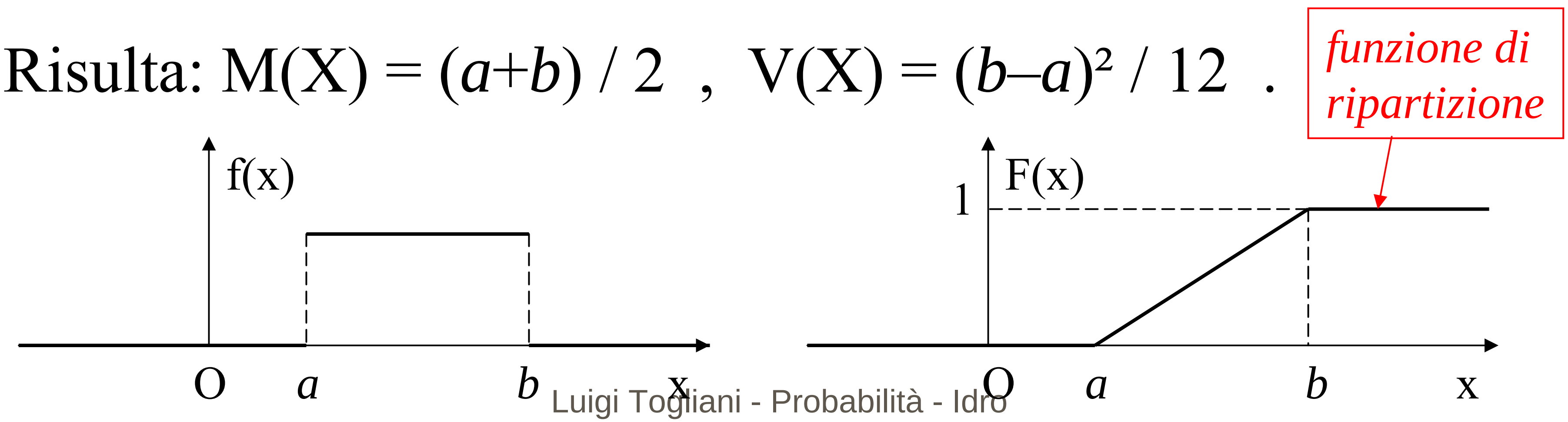
DISTRIBUZIONE UNIFORME

Densità di probabilità della variabile casuale **uniforme** X :

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & , \quad se \quad a \le x \le b \\ 0 & , \quad altrove \end{cases}$$

$a < b$, con a, b **parametri**.

Risulta: $M(X) = (a+b) / 2$, $V(X) = (b-a)^2 / 12$.



CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA’

Convergenze tra distribuzioni di probabilità

$$\begin{tikzcd} & \textbf{BINOMIALE} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \textbf{POISSONIANA} \arrow[rr] & & \textbf{NORMALE} \end{tikzcd}$$

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

⌘ La distribuzione **binomiale** di parametri n e p tende alla **poissoniana** di parametro $\lambda = np$ se $n \to +\infty$.

Dunque: $$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$, per n grande.

L'approssimazione è buona per n grande , p piccolo e np costante e finito; in particolare per: $n > 50$, $p < 0,1$ e $np < 5$.

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

- ***Teorema di De Moivre-Laplace***: La distribuzione della **binomiale** X di parametri n e p tende alla **normale** se $n \to +\infty$.

Dunque:

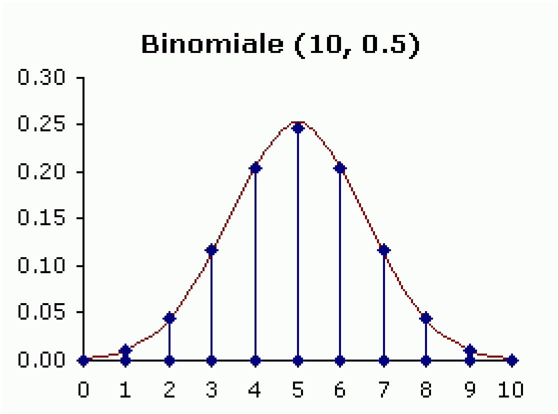
$$\lim_{n\to+\infty} P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \quad Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

essendo Z la standardizzata della binomiale X.

In pratica basta che $np > 5$, $nq > 5$.

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' esempi

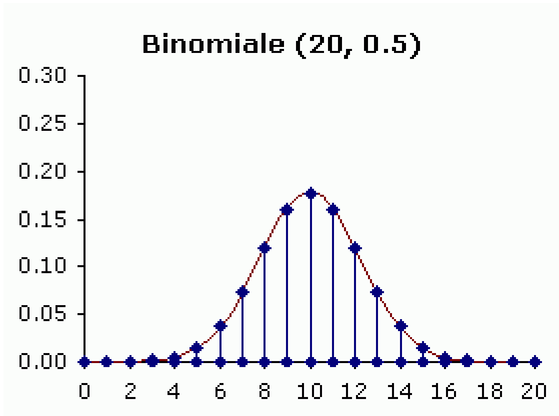
Teorema di De Moivre-Laplace: esempi



Media: $\mu = 10 \times 0.5 = 5$

Deviazione standard:

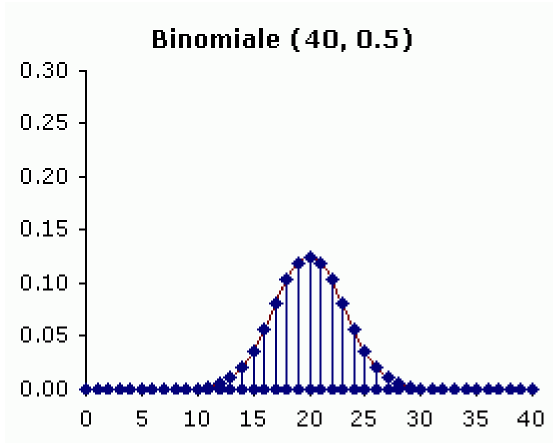
$$\sigma = \sqrt{10 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 1.58$$



Media: $\mu = 20 \times 0.5 = 10$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{20 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 2.24$$



Media: $\mu = 40 \times 0.5 = 20$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{40 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} \approx 3.16$$

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'
esempi

RIFIUTARE UN PEZZO

Una ditta produce un lotto di 400 pezzi, con probabilità di rifiuto del 2%. Qual è la probabilità che i pezzi difettosi del lotto siano tra 7 e 10?

TESTA O CROCE

Si lancia 1000 volte una moneta regolare. Qual è la probabilità che testa esca da 520 a 550 volte?

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' esempi

$n = 400$, $p = 0{,}02$, $q = 0{,}98$; $m = np = 8$, $\sigma = (npq)^{1/2} = 2{,}8$.

Approssimando la binomiale con la normale:

$P(7<X<10) = P(-0{,}375<Z<0{,}714) \cong 40{,}2\%$

c'è chi considera: $P(6{,}5<X<10{,}5) \cong 51{,}8\%$

$n = 1000$, $p = 1/2$, $q = 1/2$; $m = np = 500$, $\sigma = (npq)^{1/2} \cong 15{,}8$.

Approssimando la binomiale con la normale:

$P(520<X<550) = P(1{,}26491<Z<3{,}16228) \cong 10{,}2\%$

c'è chi considera: $P(519{,}5<X<550{,}5) \cong 10{,}6\%$

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

- La distribuzione **poissoniana** di parametro λ tende alla **normale** di parametro se λ →+∞ .

Dunque:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P(a < Z < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \quad Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

essendo Z la standardizzata della poissoniana X.

CONVERGENZE TRA DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

- ***Teorema centrale del limite***: date $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie mutuamente indipendenti con uguale speranza m e con uguale varianza σ^2, la **variabile somma** $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tende, al crescere di n, alla **normale** con $M(S_n) = nm$, $V(S_n) = n\sigma^2$. Dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} P(a < Z_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , \quad Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

essendo Z_n la standardizzata della variabile S_n.

TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE esempio

DAL FORNAIO

E' noto che in un giorno arrivano 120 clienti ciascuno compra in media 0,7 kg di pane con sqm 0,3 kg. Se all'apertura si dispone di 76 kg, qual è la probabilità di servire tutti i clienti?

L'acquisto di ogni cliente è una v.a. con $m=0,7$ kg , $\sigma=0,3$ kg .
$n=120$, $M(S_n)=nm=84$ kg , $\sigma(S_n)= \sigma\sqrt{n}\cong 3,29$ kg , $S_n= 76$ kg .
$Z \cong(76-84)/3,29\cong -2,43$. X è la v.a. che dà la quantità del pane necessario.Allora:
$P(X\leq 76 \text{ kg})=P(Z\leq -2,43) \cong 0,75\%$

TEOREMA DI BIENAYME' - CEBICEV

Se X è una variabile casuale con speranza m_X e varianza σ^2_X , risulta:

$$P(|X - m_X| < k) > 1 - \frac{\sigma_X^2}{k^2} \quad , \quad \forall k \geq \sigma_X^2$$

$$P(|X - m_X| \geq k) \leq \frac{\sigma_X^2}{k^2} \quad , \quad \forall k > 0$$

N.B. Il teorema di Cebicev non dà il valore della probabilità, ma un intervallo di valori per essa.

TEOREMA DI BERNOULLI

Su n prove ripetute nelle stesse condizioni, detta X la variabile casuale che dà il numero dei successi di un certo evento A che si realizza con probabilità p , si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

N.B. Dunque la frequenza relativa tende alla probabilità, al crescere del numero delle prove.

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono variabili aleatorie indipendenti ugualmente distribuite e con uguale speranza m , detta $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ la variabile somma, risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| < \varepsilon \right) = 1 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

N.B. La variabile 'media' tende alla media (o alla speranza) delle n variabili, al crescere di n .

GIOCHI DI SORTE

Vinco la posta S se si verifica un evento con probabilità p, vinco $-S'$ in caso contrario (probabilità $q = 1 - p$). La speranza matematica (previsione di vincita media su molte partite) è: $Sp - S'q$.

Il gioco è equo se la speranza è nulla: $Sp - S'q = 0$.

In un gioco equo il prezzo $\Pi = Sp$ è la speranza della vincita.

GIOCHI DI SORTE
esempi

ASSICURAZIONI

Una compagnia assicuratrice paga 200.000 E in un caso su 10.000, 50.000 E in uno su 1.000, 2.000 E in 1 su 50, nulla nei restanti casi. Quanto ci si aspetta che paghi mediamente?

(vedi [5])

GIOCARE A DADI

Tiro 3 dadi: se ‘1’ esce 3 volte vinco 3E, se esce 2 volte vinco 2E, se esce 1 volta vinco 1E, se non esce perdo 1E. Mi conviene giocare, cioè il gioco è equo?

(vedi [5])

GIOCHI DI SORTE
esempi

Valore atteso (speranza matematica):

$$\left(200.000\cdot {}^{1}\!/_{10.000}+50.000\cdot {}^{1}\!/_{1.000}+2.000\cdot {}^{1}\!/_{50}+0\right)E=110E$$

Distribuzione bernoulliana: p = 1/6, n = 3, S: somma vinta o persa.

$$Speranza = p_0S_0 + p_1S_1 + p_2S_2 + p_3S_3 =$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot(-1E)+3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot 1E+3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}\cdot 2E+\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 3E=-0,08E$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

LO STESSO COMPLEANNO

(George Gamow, "One, two,three…infinity", 1947)

Qual è la probabilità che tra k persone ve ne siano almeno 2 che compiono gli anni nello stesso giorno? (vedi [5],[6],[7],…)

- probabilità che 2, 3,…,k persone non compiano gli anni nello stesso giorno: 364/365, 363/365,…,(365-k+1)/365
- probabilità che gli eventi precedenti (indipendenti) si avverino tutti insieme: $364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)/365^{k-1}$;
- probabilità richiesta: $1-\dfrac{364\cdot 363\cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^{k-1}} = 1-\dfrac{365!}{(365-k)!\,365^{k}}$
- se k = 40 la probabilità richiesta è circa uguale a 0,89

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

BUSTE, BOLLETTE E CARTE

Ci sono 1000 bollette (diverse) del gas e 1000 buste (diverse) riportanti ciascuna il nome dell'utente di una delle bollette. Se si infila a caso una bolletta in ciascuna busta, qual è la probabilità che almeno una busta abbia la bolletta giusta? (vedi [5])

oppure:

Vi sono due uguali mazzi di carte da briscola. Creiamo 40 coppie di carte (coperte), ciascuna formata da una carta di ogni mazzo. Qual è la probabilità che, scoprendo le carte di una coppia, esse risultino uguali? (vedi [5])

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Probabilità che 1 busta <u>non</u> contenga la sua lettera: 999/1000

Probabilità che 2 buste <u>non</u> contengano la loro lettera: $(999/1000)^2$

Probabilità che 1000 buste <u>non</u> contengano la loro lettera: $(999/1000)^{1000}$

Probabilità che almeno 1 busta contenga la sua lettera:

$P(A) = 1-(999/1000)^{1000} \cong 63{,}23\%$. $P(A) = 1-(39/40)^{40} \cong 63{,}68\%$.

Generalizzando, con n buste, carte,... se n è molto grande:

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right] = \lim_{k\to-\infty}\left[1-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\right] = 1-\frac{1}{e} \cong 63{,}21\%$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

ESAMI, MALATTIE E AGGRESSIONI

Un esame per vedere se si ha una certa malattia funziona nel 98% dei casi. Lo 0,5% della popolazione ha quella malattia. Qual è la probabilità che il paziente, risultato positivo all'esame, abbia la malattia? (vedi [5])

oppure:

Il 10% della popolazione di una città è costituito da marziani. Una sera Tizio viene aggredito e dice alla polizia di essere sicuro all'80% che il suo aggressore sia un marziano. Qual è la probabilità che quello che dice Tizio sia vero? (vedi [5])

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

I SOLUZIONE

10.000 pazienti
- 50 malati 0,5%
  - 49 riconosciuti malati 98%
  - 1 riconosciuto sano 2%
- 9.950 sani 99,5%
  - 199 riconosciuti malati 2%
  - 9.751 riconosciuti sani 98%

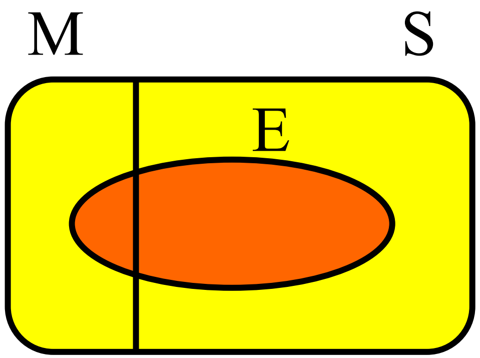
Riconosciuti malati: 49+199= 248 ; effettivi malati tra quelli riconosciuti: 49 . $P(A) = 49/248 \cong 20\%$. Non c'è da disperarsi!!

E così $P(A) = 8/(8+18) \cong 31\%$. Deposizione poco attendibile!!

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

II SOLUZIONE

Col teorema di Bayes



M: malati S: sani E: riconosciuti malati

P(M) = 5/1000 ; P(S) = 995/1000 ;

P(E|M) = 98/100 ; P(T|S) = 2/100. Si chiede:

$$P(M \mid E) = \frac{P(E \mid M) \cdot P(M)}{P(E \mid M) \cdot P(M) + P(E \mid S) \cdot P(S)}$$

$$P(M \mid E) = \frac{0,98 \cdot 0,005}{0,98 \cdot 0,005 + 0,02 \cdot 0,995} = \frac{49}{248} \cong 20\%$$

Analogamente:

$$P(M \mid A) = \frac{0,80 \cdot 0,10}{0,80 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,90} = \frac{4}{13} \cong 31\%$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

PARADOSSO DI SIMPSON, 1951

Un medico dice che la nuova cura ha circa il doppio di efficacia della cura tradizionale, basandosi su rilevazioni statistiche fatte in 2 città. Ha ragione? Qual è la probabilità che la cura sia efficace?

(vedi [6])

EFFICACIA DELLA CURA	ALFAVILLE		BETAVILLE	
	TRAD	NUOVA	TRAD	NUOVA
NO	950 (95%)	9000 (90%)	5000 (50%)	5 (5%)
SI	50 (5%)	1000 (10%)	5000 (50%)	95(95%)

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Sommando i dati omologhi delle 2 città, costruiamo la tabella sottostante. Si vede subito che la nuova cura risulta molto meno efficace della vecchia!!

EFFICACIA DELLA CURA	TRAD	NUOVA
NO	5950 (54%)	9005 (89%)
SI	5050 (46%)	1095 (11%)

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

LE TRE CARTE (Warren Weaver, 1950)

Ci sono tre carte: una con le facce bianche, una con le facce rosse e una con una faccia bianca e una rossa. Ogni carta è in una scatola nera, uguale alle altre. Un giocatore sceglie una scatola ed estrae la carta guardando solo la faccia superiore. Se tale faccia è bianca, il banco scommette alla pari (50%) che è bianca anche l'altra faccia. Conviene accettare la scommessa? (vedi [6])

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

Le carte sono: B1B2 , R1R2 , R3B3 . Se la carta estratta presenta una faccia bianca, sono possibili tre casi e non due:

faccia visibile della carta estratta:	B1	B2	B3
	↓	↓	↓
altra faccia della carta estratta:	B2	B1	R3

La probabilità che l'altra faccia della carta estratta sia bianca è 2/3 e non 1/2 . Quindi il banco è avvantaggiato nella scommessa.

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

LANCIO DI DADI

Lanciare n volte un dado e annotare ogni volta l'uscita.

Studiare i fenomeni:

- quante volte è uscito un pari nei primi 10, 20, …, n tiri (es. n=200);
- quante volte è uscito 'tre' nei primi 10, 20, …, n tiri (es. n=200);
- su gruppi di n lanci (es. n=6) in quanti casi il 'tre' è uscito 0,1,…,6 volte;
- quanti lanci attendere per avere la prima uscita del 'tre';
- quante volte appare il 'tre' su 200 tiri usando un dado: tetraedrico, cubico, ottaedrico, dodecaedrico, icosaedrico,...

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

ESECUZIONE CON L'USO DI EXCEL

CASUALE() : dà un numero decimale tra 0 e 1

ARROTONDA(X;Y): arrotonda X al numero più prossimo con Y cifre decimali

INT(X) : arrotonda X per difetto all'intero più prossimo

La formula **=ARROTONDA(CASUALE()*5+1;0)** in A1 e

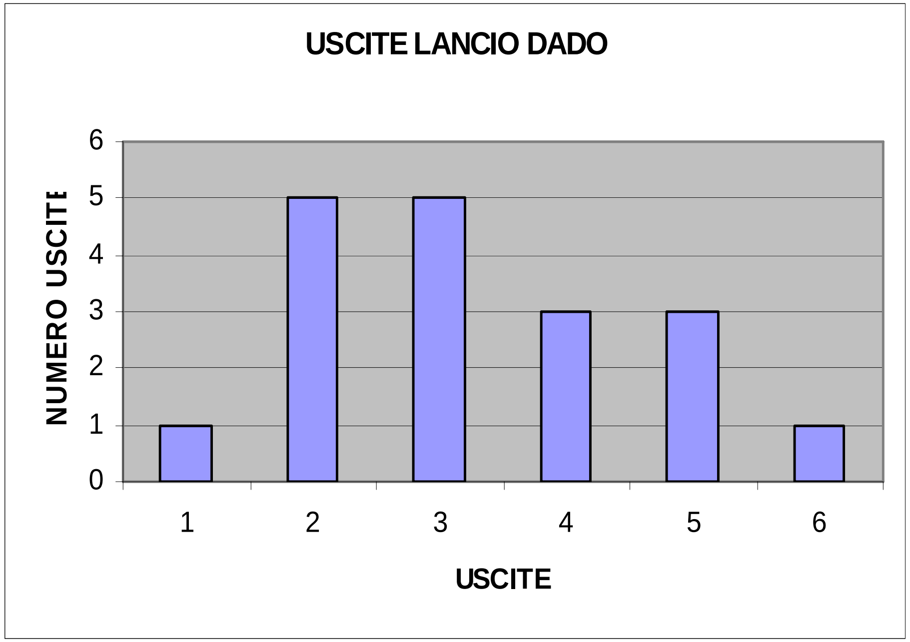
copiata più volte in colonna dà un numero a caso tra 1 e 6 .

Così per la formula **=INT(CASUALE()*6+1)**.

CONTA.SE(X:Y;Z) : conta quanti numeri uguali a Z vi sono dalla cella X alla cella Y

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

Esempio di simulazione di 18 lanci di un dado e relativa distribuzione delle uscite.



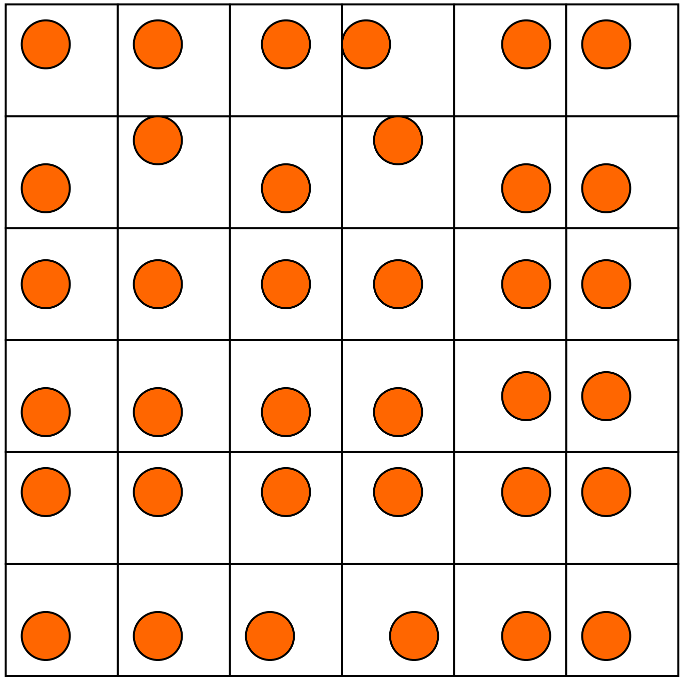
ESPERIMENTI PROBABILISTICI

STIMARE ‘A OCCHIO’

Si presenta agli spettatori una striscia di cartoncino (o altro oggetto adatto): ognuno annota la lunghezza che secondo lui deve avere il cartoncino. Si raccolgono i dati e si analizzano in classi di frequenze, costruendo il relativo istogramma.
Vi è una moda? Che cosa si può dire di media e mediana?
Se vi è una moda, si può identificare attorno ad essa una zona in cui si raccolga circa i 2/3 dei dati? Si possono ’normalizzare’ i dati? Che cosa rispondere a chi chiede qual è la ‘vera’ lunghezza del cartoncino?

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

UN GIOCO PER SIMULARE LA DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ATOMICA



- Uso di un reticolo di 6 x 6 caselle; ogni casella ha 1 disco.
- Lancio di 2 dadi cubici: le uscite danno le coordinate di 1 casella da cui è tolto il disco (se la casella è vuota ripetere il lancio) che viene messo nella casella avente per coordinate le uscite di un 2° lancio dei dadi.
- Ripetere più volte il doppio lancio dei dadi con relativi spostamenti (es. 100 doppi lanci).
- Alla fine contare quante caselle hanno: 0,1, 2,…, dischi.

ESPERIMENTI PROBABILISTICI

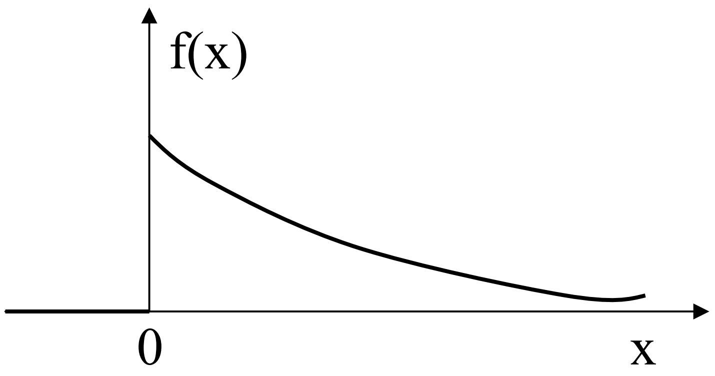
INTERPRETAZIONE

Il gioco (*Moving quanta at random*, da *Change and chance*,1975) simula la distribuzione probabilistica dell'energia degli atomi.

casella → atomo ; 0 dischi → livello fondamentale energia ;

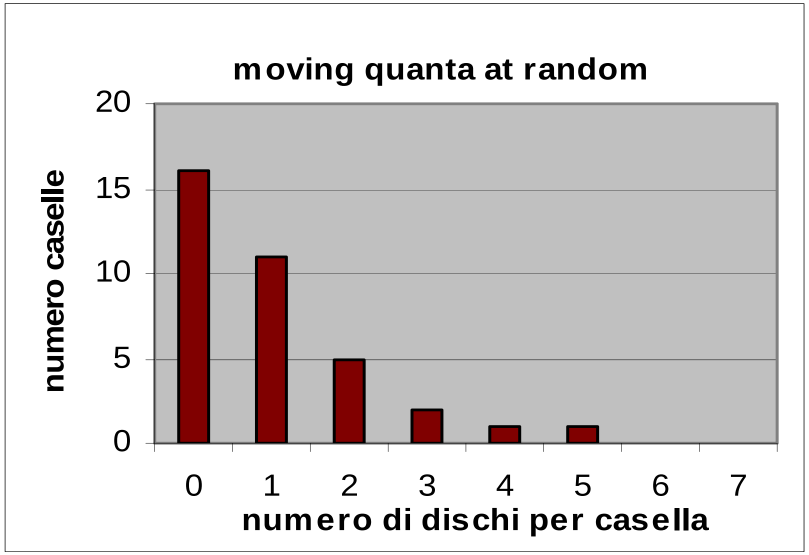
1 disco → 1° livello eccitato ; ecc…

Più grande è il numero dei doppi lanci, più ci si avvicina ad una distribuzione esponenziale di probabilità.



ESPERIMENTI PROBABILISTICI

ESECUZIONE CON L'USO DI EXCEL



2	0	1	0	1	0
1	1	2	3	0	0
0	0	1	5	1	0
2	0	2	0	0	0
1	3	0	4	0	1
1	2	0	0	1	1

•Si riempie una tabella 6x6 di numeri 1 (1 disco per ogni casella); si fanno vari doppi lanci dei 2 dadi e si aggiorna di volta in volta il numero in ogni casella.

•Si crea una nuova tabella del n° di caselle aventi un fissato numero (0,1,2,3,…): uso di CONTA.SE(x:y;n).

•Infine si costruisce il diagramma a strisce.

0	1	2	3	4	5	6	7
16	11	5	2	1	1	0	0

USO DI EXCEL

⌘ DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Generare la distribuzione binomiale con n = 5 e p = 0,5 (es. uscita ‘testa’ in cinque lanci di una moneta).

A2

In colonna A scrivere i valori di X : 0, 1, 2, 3, 4, 5. In colonna B calcolare le corrispondenti probabilità usando la funzione:

DISTRIB.BINOM(A2;5;0,5;FALSO)

fornisce la distribuzione di probabilità;

n p con ‘VERO’ la funzione di ripartizione

⌘ DISTRIBUZIONE DI POISSON

Generare la distribuzione di Poisson con λ = 2,5.

In colonna A digitare alcuni tra i primi valori di X : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. In colonna B calcolare le corrispondenti probabilità usando la funzione:

POISSON(A2;2,5;FALSO)

λ

fornisce la distribuzione di probabilità

con 'VERO' la funzione di ripartizione

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ **DISTRIBUZIONE NORMALE O GAUSSIANA**

Generare la densità di probabilità e la funzione di ripartizione della normale con $m = 100$ e $\sigma = 5$.

In colonna A digitare alcuni valori di X : 80, 84, 88,..., 120.

In colonna B calcolare le relative probabilità con la funzione:

DISTRIB.NORMALE(A2;100;5;FALSO) densità di

m σ probabilità

oppure calcolare i valori della funzione di ripartizione con:

DISTRIB.NORMALE(A2;100;5;VERO) funzione di

m σ ripartizione

⌘ DISTRIBUZIONE CHI-QUADRO

Generare la funzione di ripartizione della distribuzione chi-quadro con ν =5 o ν =10 (gradi di libertà).

In colonna A digitare alcuni valori di X; ad es.: 0,1,2,…,10.

In colonna B calcolare i relativi valori di α per ν=5 con la funzione:

DISTRIB.CHI(A2;5)

ν

In colonna C calcolare i relativi valori di F(x) con la funzione:1-B2.

Ripetere il tutto per ν=10.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Generare la densità di probabilità e la funzione di ripartizione della distribuzione esponenziale con λ=2.

In colonna A digitare alcuni valori di X : 0;0,5;1;…;5.

In colonna B calcolare i relativi valori della esponenziale con:

DISTRIB.EXP(A2;2;FALSO) densità di probabilità

λ

oppure calcolare i valori della funzione di ripartizione con:

DISTRIB.EXP(A2;2;VERO) funzione di ripartizione

λ

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ **ELABORAZIONI GRAFICHE**

Per variabili casuali discrete si costruisce il diagramma a barre (strisce) della distribuzione di probabilità: si selezionano i valori delle probabilità p_x(colonna B), si clicca sull'icona della grafica e si sceglie 'istogramma' (il 1° va bene); per mettere in ascisse i valori di X si sceglie 'serie', si pone il cursore su 'etichette asse categorie (X)', poi si seleziona nella tabella la colonna dei valori di X che vengono automaticamente inseriti in ascisse; si procede normalmente (titoli, legenda,…). Procedimento analogo per la funzione di ripartizione se è stata tabulata.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

⌘ ELABORAZIONI GRAFICHE

Per variabili casuali continue si costruisce il grafico della densità di probabilità: si selezionano i valori della X e delle relative probabilità f(x) (colonne A e B), si clicca sull'icona della grafica e si sceglie 'dispersione (XY)' (il 2° o il 3° modo); si procede normalmente (titoli, legenda,…). Può essere utile limitare opportunamente il range dei valori di X.

Stesso procedimento per la funzione di ripartizione se è stata tabulata.

APPLICAZIONI INFORMATICHE

APPLET SULLA PROBABILITA'

⌘ **http://www.ds.unifi.it/VL/VL_IT/comb/comb1.html**

Laboratorio virtuale di probabilità e statistica: si possono trovare simulazioni su prove bernoulliane, lancio di dadi e di monete, tavola di Galton, ago di Buffon, ecc...

⌘ **http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/**

bella simulazione sulla macchina di Galton

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Origini legate al gioco, in particolare al gioco d'azzardo e quindi alle scommesse: prima coi dadi (dai tempi dei Romani), poi anche con le carte (dopo il 1350).

Condanna da parte dello Stato e della Chiesa dei vizi legati al gioco d'azzardo:

-sermone di S. Cipriano da Cartagine *De Aleatoribus* (c. 240)

-sermone di S. Bernardino da Siena *Contra aleatorum ludus* (1423)

-Federico II (1232): legge *de aleatoribus*

-Luigi IX (1255): proibizione del gioco e della costruzione dei dadi

…….

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Nonostante le proibizioni il gioco fiorisce in tutte le classi sociali sia come passatempo che come sfida alle leggi.

Tra i giochi più diffusi: *hazard* (dadi) e *primero* (carte).

Wibold da Cambray (960) diffuso solo nel XVII sec.

De Vetula (Richard de Fournival (1200-50)?)

conteggio del numero dei modi in cui tre dadi possono cadere

Fino al 1400 non vi è uno studio adeguato sui casi possibili presenti in un certo gioco.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Con il 15° secolo e fino a metà del 16° secolo

- si fanno osservazioni su:

  problemi di **divisione della posta** in una partita interrotta

  ↕

  problemi sulla **divisione dei guadagni e delle perdite** in contratti commerciali (commercio marittimo,assicurazioni,…)

- emergono:

  * la **dimensione del tempo** (speculazione)

  * il **desiderio di controllare il futuro** (pianificazioni commerciali)

(I. Schneider, *Why do we find the origin of a calculus of probabilities in the 17th century?*, 1980)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Perché il calcolo della probabilità emerse solo nel 17° secolo?

a) assenza di un'algebra combinatoria ;

b) superstizione degli scommettitori;

c) assenza della nozione di evento casuale;

d) barriere religiose o morali che si frapponevano allo sviluppo dell'idea di casualità e di caso

(Maurice G. Kendall, *Induzioni*, 2, 2001)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Fino al 17° secolo il concetto di probabilità è legato a:

- ‘endoxos’ (Aristotele):livello di credenza che dipende dallo stato di informazione del soggetto (anticipa il soggettivismo)
- ‘dogma’ aristotelico: agli eventi casuali - e ai giochi d’azzardo -

non può essere applicata la nozione scientifica di probabilità.

(I. Schneider, 1980)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Luca Pacioli (1445-1514)

Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità (1494).

Problema dei punti (o delle parti):

A e B giocano ad un gioco equo e si accordano nel continuare sino a quando uno vince 6 partite, ma la competizione deve essere interrotta quando A ha vinto 5 partite e B ne ha vinte 3. Come dovrebbe essere ripartita la posta?

Pacioli dice che le poste dovrebbero esser suddivise nella proporzione di 5 a 3, ma la soluzione è errata.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

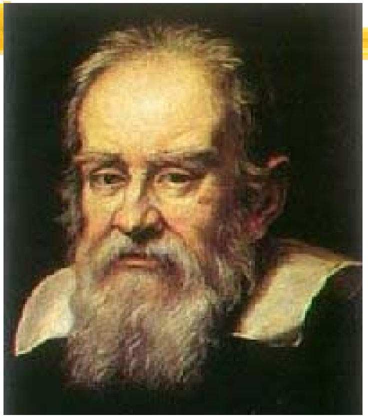
Niccolò Tartaglia (1499-1557)

General Trattato (1556): corregge Pacioli nel problema dei punti; appare il triangolo numerico.

Girolamo Cardano (1501-1576)

De ludo aleae (1526?, postumo 1663): studio matematico dei giochi di sorte, (gioco a carte *primero)*; probabilità dell'evento prodotto logico di due eventi;anticipazione della legge dei grandi numeri.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'



Galileo Galilei (1564-1642)

Sopra le scoperte dei dadi? (1630?): studio probabilità nel gioco della *zara* (lancio di 3 dadi).

"... il numero delle scoperte de i tre dadi che si compongono da tre numeri uguali non si producono se non in un solo modo; le triplicità che nascono da due numeri uguali e dal terzo differente si producono in 3 maniere; quelle che nascono da 3 numeri tutti differenti si formano in 6 maniere..."

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Blaise Pascal (1623-1662)

Approccio matematico alla probabilità; studio del triangolo di Tartaglia dei coefficienti binomiali.

Carteggio con **Pierre de Fermat (1601-1665)** e col Cavaliere de Mèrè (1654) su problemi di probabilità e giochi di sorte.

Traite du triangle arithmetique: concetti di vincita e di speranza matematica in un gioco di sorte, divisione equa della posta.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

P e F giocano a "Testa o Croce". Ciascuno punta 50 franchi. Ogni partita vinta vale un punto. Se esce T(esta) il punto è di F, se esce C(roce) il punto è di P. Quando uno di essi avrà raggiunto 10 punti, avrà i 100 franchi. Ma devono smettere di giocare quando F sta vincendo per 8 a 7. Come si divideranno i 100 franchi?

Prima soluzione (alla Pacioli)

8+7=15 ; F riceve 8/15 della posta totale, P ne riceve i 7/15.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Seconda soluzione (alla Fermat)

TTTT	TTTC	TTCT	TCTT	blu: F vince
CTTT	TTCC	TCTC	TCCT	
CTTC	CTCT	CCTT	TCCC	rosso: P vince
CCTC	CCCT	CTCC	CCCC	

F vince se escono almeno 2 T su un numero massimo di 4 lanci.

F ha probabilità 11/16 di vincere e gli spettano gli 11/16 dell’intera posta; a P spettano i 5/16 dell’intera posta.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Terza soluzione (alla Pascal)

A F mancano 2 punti per vincere, a P ne mancano 3. Prendo la 5^ riga (2+3=5) o quella di posto 4 del triangolo di Pascal:

1 4 6 4 1 . Sommo tutti i termini: $1+4+6+4+1=2^4=16$.

Sommo i primi 3 termini: 1+4+6=11 e ho la probabilità che F vinca : 11/16 ; in tal caso si prende gli 11/16 dell’intera posta.

Sommo i primi 2 termini: 1+4=5 e ho la probabilità che P vinca : 5/16 ; in tal caso si prende i 5/16 dell’intera posta.

Possibilità di generalizzare la questione.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Christiaan Huygens (1629-1695)

De ratiociniis in ludo aleae (1656-7), con lettera a Van Shooten:

primo libro ampio sul calcolo della probabilità; concetto di speranza;

rifonda la teoria, senza far uso dei risultati dei ‘francesi’.

“Quanto meno sembra che possano essere comprese dalla ragione le cose che sono casuali e incerte, tanto più mirabile sarà stimata la scienza alla quale sono subordinate anche queste cose”.

Riprende il problema dei punti, confermando i risultati ottenuti da Pascal e Fermat.

Christaan Huygens
(1629-1695)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Dissertatio de arte combinatoria (1666):

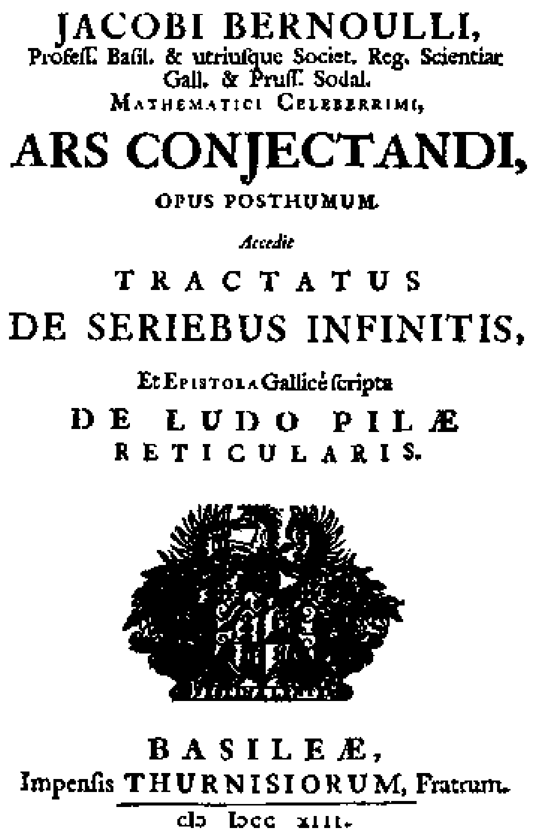
linguaggio matematizzato modellato sulla stessa struttura del pensiero (*characteristica universalis*) che dovrebbe poter ridurre ogni disputa filosofica a un semplice calcolo del valore di verità di un enunciato; trovare tutti i possibili predicati di un dato soggetto e, dato un predicato, trovare tutti i suoi possibili soggetti.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Jakob Bernoulli (1654-1705)

Ars Conjectandi (opera incompleta, edita postuma nel 1713 da N. Bernoulli): legge dei grandi numeri, distribuzione binomiale.

“Noi definiamo l’arte di congetturare, o stocastica, come quella di valutare il più esattamente possibile le probabilità delle cose, affinché sia sempre possibile, nei nostri giudizi e nelle nostre azioni, orientarci su quella che risulta la scelta migliore, più appropriata, più sicura, più prudente”.


JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

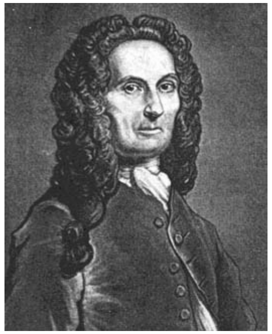
BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

"…nei giochi di carte o di dadi l'aspettativa può essere precisamente e scientificamente determinata …nessun mortale potrà mai sapere il numero degli eventi rischiosi che possono accadere a un giovane o a un anziano…
La via più sicura per valutare la probabilità non è in questi casi a priori, cioè partendo dalle cause, ma a posteriori, ricavandola dalla frequenza degli eventi osservati in casi analoghi."

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Abraham De Moivre (1667-1754)



The Doctrine of Chances (1718-38): concetto di speranza, probabilità classica, algebrizzazione della probabilità.

Approssimazione normale alla binomiale (1733).

"*Probabilità di ottenere un asso lanciando 4 volte un dado a 6 facce. …lanciare un dado 4 volte equivale a lanciarne 4 una volta sola…$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ciascuno dei termini in a si potrà considerare come una parte del numero di possibilità che l'asso si presenti. I termini in cui compare a sono 4 e quindi ponendo $a=1$ e $b=5$, avremo il numero $1+20+150+500=671$ … il numero di tutte le possibilità è $(a+b)^4 = 6^4=1296$,…la probabilità è 671/1296*"

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Thomas Bayes (1702-1761)

Il teorema di B. (in *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances*,1763, postumo) è alla base della teoria soggettivista. Inferenza bayesiana.

Georges L. Buffon (1707-1788)

I problemi della moneta e dell'ago (*Sur le jeu de franc-carreau*) sono tra i primi di probabilità geometrica e che implicano l'uso di distribuzioni continue.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Theorie analitique des probabilités (1812): calcolo analogo per

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad \text{Uso di}: \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\vartheta = \pi$$

$$\text{Ma}: \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$$

Studio del problema dell’ago di Buffon.

Essai philosophique des probabilités (1814):

“*In fondo la teoria delle probabilità è soltanto senso comune espresso in numeri*”.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

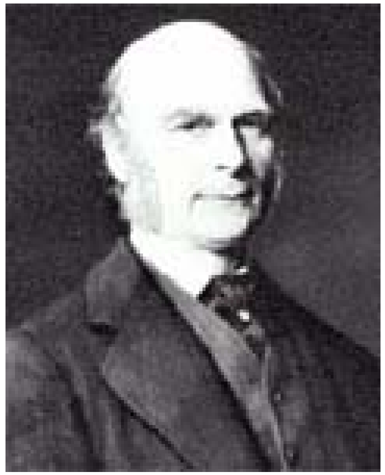
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Rilevazione geodesica su grande scala dello stato di Hannover (1818) - curva normale per descrivere la misura degli errori (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827); uso della normale per studiare gli errori nelle osservazioni astronomiche.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Simeon-Denis Poisson (1781-1840)

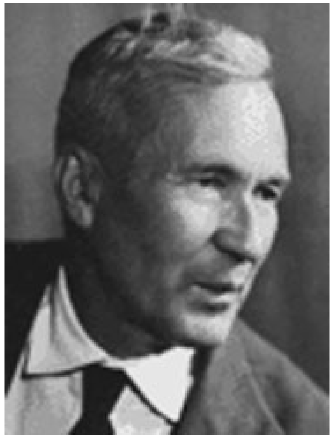
Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile (1837): distribuzione di Poisson.



Francis Galton (1822-1911)

Teoremi di convergenza alla normale; quincunx (*Natural Inheritance*,1889)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’



Andrej N. Kolmogorov (1903-1987)

Concetti fondamentali nel calcolo delle probabilità (1933): assiomatizzazione.

Bruno de Finetti 1906–1985

Bruno de Finetti (1906-1985)

Rappresentante della scuola soggettivista (“*La probabilità non esiste*”). *Probabilismo, saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza* (1930): per la prima volta le sue vedute soggettiviste sul calcolo delle probabilità.

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Soggettivismo: realistico correttivo di un'arbitraria convinzione sulla pretesa "oggettività" della scienza, secondo la quale essa sarebbe un attributo intrinseco alle cose, mentre altro non è che la condivisione, fra più esseri razionali, delle stesse informazioni, la coincidenza di soggettività, ossia una "intersoggettività".

"*La formulazione di una teoria, di una legge, è un anello del processo mentale per cui passiamo dall'osservazione di fatti passati alla previsione di fatti futuri. In definitiva è solo dei fatti, dei singoli fatti, che ha senso parlare. E' ai fatti, che (se sono futuri, e se comunque ne ignoriamo l'esito) possiamo attribuire una probabilità*". (De Finetti)

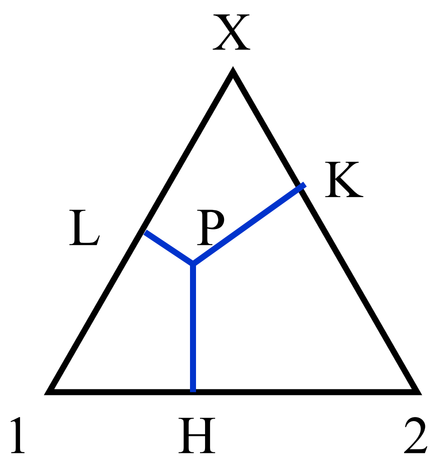
ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

Interventi di de Finetti per il rinnovo della didattica

- Nuovi programmi d’insegnamento (Frascati, anni ‘60)
- Sul “*Periodico di Matematiche*” 1965-74: programmi e criteri per l’insegnamento della matematica, il ‘morbo della trinomite’, proposte per la matematica nei nuovi licei, contro la matematica per deficienti…
- Fusionismo: “*... fusione di geometria da una parte e di aritmetica, analisi ecc, dall’altra; più in generale, si tratta di fondere in modo unitario tutto ciò che si studia (anche interdisciplinarmente, tra matematica e altre scienze...)”* (De Finetti)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

Esempio di fusionismo: pronostici per una partita di calcio



Nel triangolo equilatero 12X : PH+PK+PL = h (altezza). Se h=1, PH=p_X, PK=p_1, PL=p_2 allora

$p_X + p_1 + p_2 = 1$, con $p_X, p_1, p_2 \in [0,1]$

Quindi ogni punto P del triangolo rappresenta un pronostico per una partita: se P≡1 allora il risultato 1 è certo, 2 e X sono impossibili.

La vicinanza di P a un lato o a un vertice indica se un pronostico è ritenuto più probabile di un altro. (De Finetti, 1967)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA’

“Per l’insegnamento occorre tener ben presente che la prospettiva dei destinatari è quella di potenziali consumatori di matematica, che dovremmo persuadere della possibilità e convenienza di farne uso nei loro problemi quotidiani anziché ignorarla e ragionare coi piedi.”

“...rivalutare gli aspetti più attivi, più creativi (ma anche, e proprio per ciò, più avventurosi, fantasiosi, soggettivi) del nostro modo di pensare. Il rigido e impeccabile ragionamento deduttivo non può condurre a nessuna conclusione nuova, cioè non già implicitamente contenuta nelle premesse.” (De Finetti)

ELEMENTI DI STORIA DELLA PROBABILITA'

"Un insegnamento basato sulla presentazione di problemi concreti, e più diversi fra loro, in modo da far librare il discente dal concreto all'astratto nel modo più naturale e "storicamente" vero. Anche ai fini di una più intuitiva comprensione, era da lui ben accettato il sacrificio di una parte del famigerato rigore matematico, al quale si dovrebbe arrivare soltanto dopo una già sicura acquisizione dei concetti…La cosiddetta 'matematica da fisico', come viene spesso indicata la matematica nella forma più concettuale in cui normalmente è utilizzata dai fisici, non solo non scandalizzava de Finetti, ma anzi lo trovava pienamente d'accordo".

BIBLIOGRAFIA

LIBRI

[1] Prodi G., “Matematica come scoperta”, voll.1 e 2, D’Anna, FI, 1983

[2] Di Bacco-Lombardo, “Fatti e congetture”, La Nuova Italia, FI, 1990

[3] Zwirner-Scaglianti, “Pensare la Matematica”, voll. 2 e 3, CEDAM, PD, 1993

[4] De Finetti B., “Il saper vedere in Matematica”, Loescher, TO, 1967

[5] Paulos J. A., “Gli snumerati”, Leonardo, MI, 1990

[6] Falletta N., “Il libro dei paradossi”, TEA, 2002

[7] Gardner M., “Enigmi e giochi matematici”, BUR, 1998

[8] Maraschini-Palma, “Format, SPE”, vol.2, Paravia, TO, 1996

[9] Lombardo Radice-Mancini Proia, “Il metodo matematico”, Principato, MI, 1977

[10] Nuffield, “Change and chance”, unit 9, Longman, London, 1975

BIBLIOGRAFIA

[11] Cerasoli A.-M., “Calcolo delle probabilità”, Zanichelli, BO, 1987

[12] De Finetti B., “Teoria delle probabilità”, Einaudi, TO, 1970

[13] Monti-Pierobon, “Teoria della probabilità”, Zanichelli, BO, 2000

[14] Scozzafava R., “Primi passi in probabilità...”, Zanichelli, BO, 1996

[15] Lipschultz, “Calcolo delle probabilità”, Schaum’s, McGraw-Hill, MI, 1994

[16] Tibone F.-Pezzi G., “La Fisica secondo il PSSC”, Zanichelli, BO, 2005

[17] Boyer C.,”Storia della Matematica”, Mondadori, MI, 1998

BIBLIOGRAFIA

ARTICOLI DA RIVISTE

Schneider I., “Why do we find the origin of a calculus of probabilities in the 17th century?”, D. Reidel Publishing Company, 1980

Kendall M., “Le origini del calcolo delle probabilità”, Induzioni, 2/2001

Maturo A., “Sull’assiomatica di Bruno de Finetti...”, Periodico di Matematiche, 1/2003

Mortola S., “Dimostrazioni che lasciano senza parole”, Archimede, 2/2006

SITI INTERNET

http://www.ds.unifi.it/VL/VL_IT/comb/comb1.html

http://cirdis.stat.unipg.it/files/macchina_galton/protagonisti/galton.htm

http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/garello/chiquadro.pdf

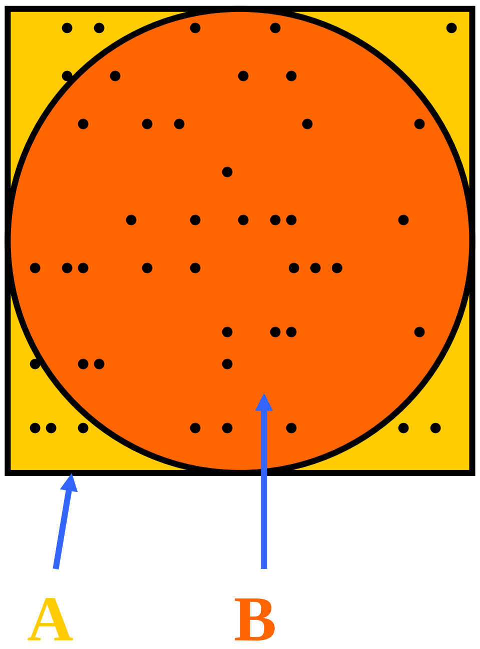
www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml

Distribuzioni di probabilità: lancio di dadi e altri eventi casuali

F I N E

PROBABILITA' GEOMETRICA
esempi

Qual è la probabilità che un tiratore centri la zona **B** supponendo che comunque centri la zona **A**?



$$P(E) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \cong 0,785$$

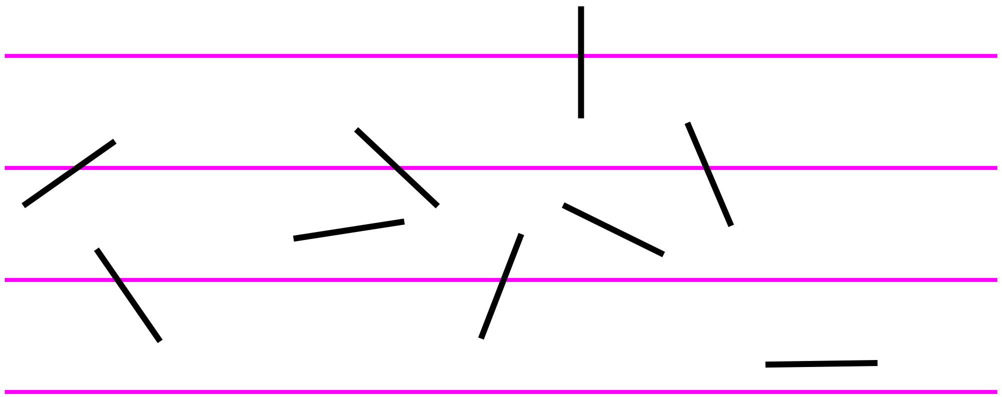
Metodo Monte Carlo Si considerano punti casuali in A: alcuni saranno anche in B.

$$P(E) = \frac{n^\circ\ punti\ in\ B}{n^\circ\ punti\ in\ A} = \frac{35}{45} \cong 0,778$$

GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

L'AGO DI BUFFON

Qual è la probabilità che un ago lungo L intersechi una retta di un insieme di parallele distanti L l'una dall'altra consecutiva?



GIOCHI E PARADOSSI PROBABILISTICI

$P(A) = 2 / \pi \cong 63{,}66\%$. La dimostrazione di G. Rota (1997):

a) prendo un curva piana c qualsiasi, lunga L;

b) calcolo il valor medio m del n° d'intersezioni di c con le rette;

c) m non dipende dalla forma di c ma solo dalla sua lunghezza L;

d) m è proporzionale a L;

e) se c è la circonferenza di diametro L, $m = 2 = k\,L = k\,\pi\,L$, quindi $k = 2 / (\pi\,L)$;

f) per l'ago lungo L, sarà: $m = k\,L = 2\,L / (\pi\,L) = 2 / \pi$;

g) $m = P(A)\cdot 1 + (1 - P(A))\cdot 0 = P(A)$

Simulazione in: www.cut-the-knot.org/ctk/August2001.shtml

ESPERIMENTO DELL'AGO DI BUFFON

Preparare un foglio rigato con rette distanti quanto la lunghezza di un ago. Lanciare più volte un gruppo (es. 3) di aghi uguali e annotare quanti intersecano le righe della griglia. Qual è la frequenza con cui un ago interseca la griglia?
Si può rifare l'esperienza usando, al posto dell'ago, una moneta avente il perimetro lungo quanto l'ago.