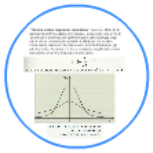
LA GAUSSIANA

Come nasce ...una funzione

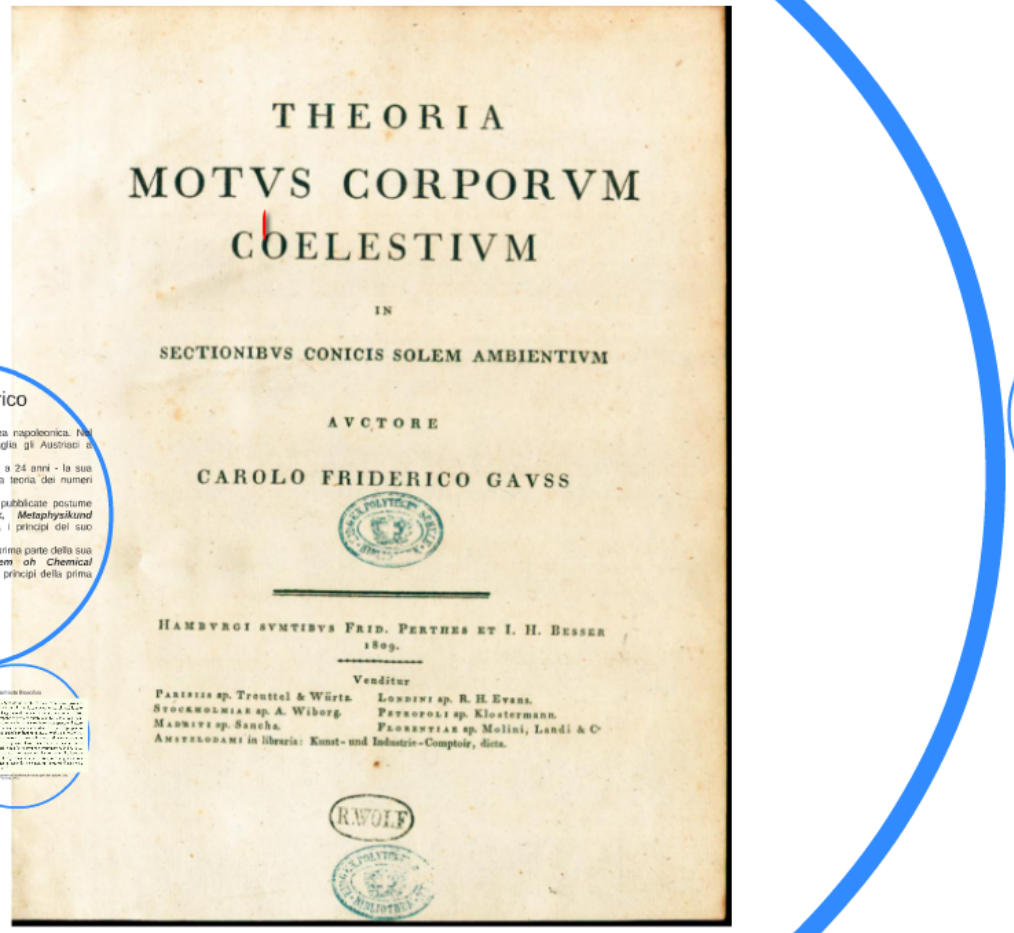
La storia della funzione di distribuzione normale (la cosiddetta Gaussiana) è una storia che parte da lontano e che si ramifica profondamente nella scienza dell'oggi e nella sua capacità di leggere la realtà.
Proveremo a ricostruire questa storia, in una sorta di flash-back:

- partiremo dal contesto in cui essa è stata ideata e dedotta;
- risaliremo molti dei torrenti ideali che vi sono confluiti, presentando - anche se sommariamente - i tanti personaggi che hanno contribuito - direttamente o indirettamente - a preparare il terreno su cui l'intuizione di questo strumento matematico è germogliato;
- analizzeremo infine l'ultimo miglio, ovvero il ragionamento attraverso il quale il "principe dei matematici" è arrivato ad attribuirgli la forma matematica che conosciamo.



Il contesto storico

L'inizio del secolo XIX apre l'epopea napoleonica. Nel giugno del 1800 Napoleone sbaraglia gli Austriaci a **MARENGO**.
L'anno seguente GAUSS pubblica - a 24 anni - la sua prima opera di rilievo, dedicata alla teoria dei numeri "***Disquisitiones Arithmeticae***".
Nel 1804 HEGEL redige le lezioni pubblicate postume con il titolo "***Jenenser Logik, Metaphysik und Naturphilosophie***" in cui elabora i principi del suo metodo dialettico.
Nel 1808 John DALTON pubblica la prima parte della sua fondamentale opera "***New System oh Chemical Philosophy***" , nella quale espone i principi della prima teoria atomica moderna.



THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM
IN
SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM
AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER
1809.

Venditur
PARISIIS ap. Treuttel & Würtz. LONDINI ap. R. H. Evans.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg. PETROPOLI ap. Klostermann.
MADRITI ap. Sancha. FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C°
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

Prezi

AIF- Gruppo di storia della fisica

Come nasce...una funzione

Storia della distribuzione normale degli errori, ovvero della più nota gaussiana

Messina, 23-27 febbraio 2015

Prezi

Come nasce ...una funzione

La storia della funzione di distribuzione normale (la cosiddetta Gaussiana) è una storia che parte da lontano e che si ramifica profondamente nella scienza dell'oggi e nella sua capacità di leggere la realtà.

Proveremo a ricostruire questa storia, in una sorta di flash-back:

- partiremo dal contesto in cui essa è stata ideata e dedotta;
- risaliremo molti dei torrenti ideali che vi sono confluiti, presentando - anche se sommariamente - i tanti personaggi che hanno contribuito - direttamente o indirettamente - a preparare il terreno su cui l'intuizione di questo strumento matematico è germogliato;
- analizzeremo infine l'ultimo miglio, ovvero il ragionamento attraverso il quale il "principe dei matematici" è arrivato ad attribuirgli la forma matematica che conosciamo.

Il contesto filosof

"***Il caso,*** *negli scritti o nelle pa*
è un suono del tutto privo di s
comporta alcuna determina
qualche modo di esisten
determinazione dell'esisten
piuttosto che alla non esiste
essere definito nè compreso:
affermare o negare al suo
proposizioni, se non questa, <
una espressione verbale>" (A.
"The Doctrine de chances", 1

"L'evento concettuale decisivo della fisica del XX secolo è stato la scoperta che il mondo **non è deterministico**. La causalità, per lungo tempo baluardo della metafisica, cominciò a vacillare, se non a sgretolarsi del tutto: il passato non determina esattamente il futuro.
Tale evento fu preceduto da una trasformazione graduale. Nel corso del XIX secolo ci si rese conto che il mondo poteva essere regolare pur non essendo soggetto a leggi di natura universali.
Si apriva uno spazio per il caso.
L'erosione del determinismo non creò, al momento, problemi per nessuno. Pochi se ne accorsero. Tutti invece erano al corrente di una novità dilagante: il censimento delle persone e delle loro abitudini. La società divenne statistica. Era emerso un nuovo tipo di legge, analogo alle leggi di natura, ma relativo alle persone. Le nuove leggi erano espresse in termini di probabilità e comportavano le nozioni di normalità e di deviazione dalla norma." (*da **"IL CASO DOMATO"**, di Ian Hancking, Milano, 1994; pag. 1)*

Prezi

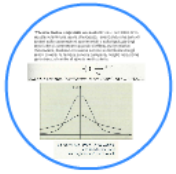
LA GAUSSIANA

asce ...una funzione

ione di distribuzione normale (la cosiddetta
storia che parte da lontano e che si ramifica
a scienza dell'oggi e nella sua capacità di

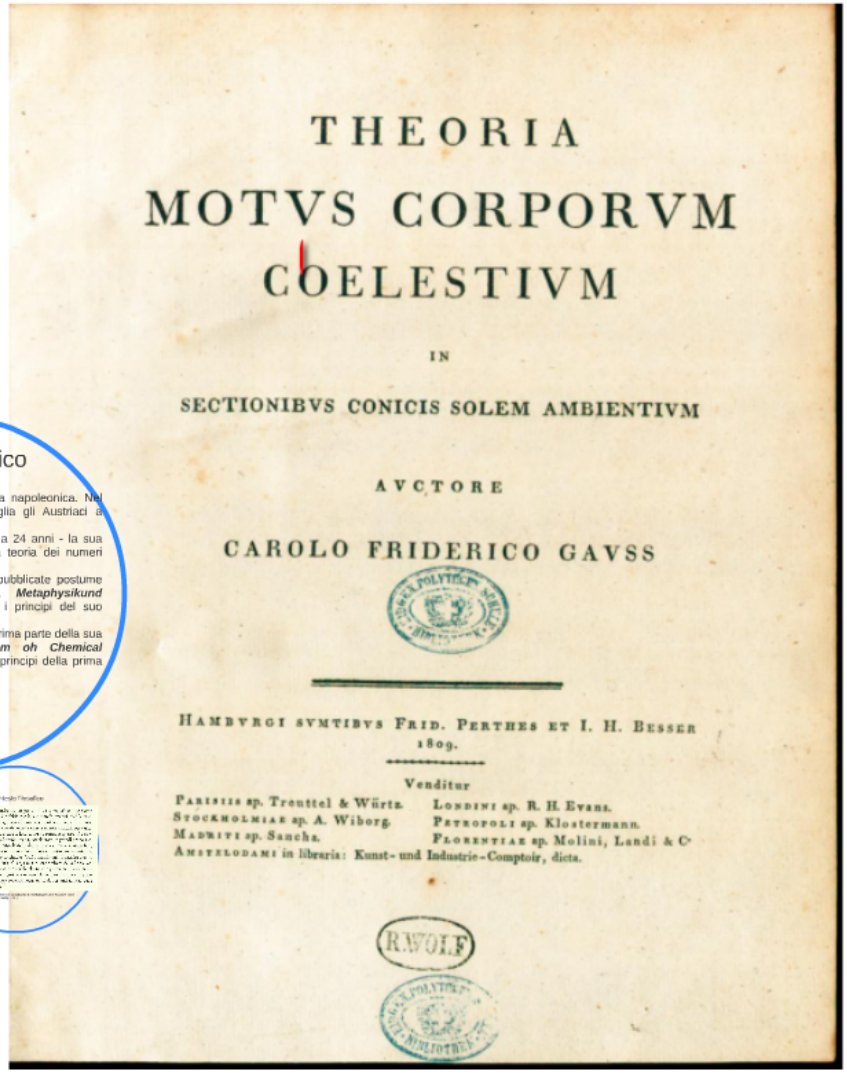
truire questa storia, in una sorta di flash-

testo in cui essa è stata ideata e dedotta;
dei torrenti ideali che vi sono confluiti,
ne se sommariamente - i tanti personaggi
uito - direttamente o indirettamente - a
o su cui l'intuizione di questo strumento
ogliato;
fine l'ultimo miglio, ovvero il ragionamento
il "principe dei matematici" è arrivato ad
matematica che conosciamo.



Il contesto storico

L'inizio del secolo XIX apre l'epopea napoleonica. Nel giugno del 1800 Napoleone sbaraglia gli Austriaci a **MARENGO**.
L'anno seguente GAUSS pubblica - a 24 anni - la sua prima opera di rilievo, dedicata alla teoria dei numeri "***Disquisitiones Arithmeticae***".
Nel 1804 HEGEL redige le lezioni pubblicate postume con il titolo "***Jenenser Logik, Metaphysikund Naturphilosophie***" in cui elabora i principi del suo metodo dialettico.
Nel 1808 John DALTON pubblica la prima parte della sua fondamentale opera "***New System oh Chemical Philosophy***" , nella quale espone i principi della prima teoria atomica moderna.



THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM

IN

SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER
1809.

Venditur
PARISIIS ap. Treuttel & Würtz. LONDINI ap. R. H. Evans.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg. PETROPOLI ap. Klostermann.
MADRITI ap. Sancha. FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C°
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir, dicta.

qualche modo di esistenza; nè una determinazione dell'esistenza stessa, piuttosto che alla non esistenza; non può essere definito nè compreso: nè si possono affermare o negare al suo riguardo delle proposizioni, se non questa, <che è soltanto una espressione verbale>" (A. De Moivre, da "**The Doctrine de chances**", 1711)

Il contesto storico

L'inizio del secolo XIX apre l'epopea napoleonica. Nel giugno del 1800 Napoleone sbaraglia gli Austriaci a **MARENGO**.

L'anno seguente GAUSS pubblica - a 24 anni - la sua prima opera di rilievo, dedicata alla teoria dei numeri "***Disquisitiones Arithmeticae***".

Nel 1804 HEGEL redige le lezioni pubblicate postume con il titolo "***Jenenser Logik, Metaphysikund Naturphilosophie***" in cui elabora i principi del suo metodo dialettico.

Nel 1808 John DALTON pubblica la prima parte della sua fondamentale opera "***New System oh Chemical Philosophy"*** , nella quale espone i principi della prima teoria atomica moderna.

Il contesto filosofico

*"...anche i filosofi sono generalmente d'accordo che ciò che il volgo chiama **caso,** non è altro che una causa segreta e nascosta" (D. Hume da "**A Treatise of Human Nature**", 1739)*

"Si ammette da tutti che nulla esiste senza una causa della sua esistenza e che il caso, quando si esamini con rigore, è una parola puramente

Il contesto filosofico

"***Il caso,*** *negli scritti o nelle parole degli atei, è un suono del tutto privo di significato: non comporta alcuna determinazione a un qualche modo di esistenza; nè una determinazione dell'esistenza stessa, piuttosto che alla non esistenza; non può essere definito nè compreso: nè si possono affermare o negare al suo riguardo delle proposizioni, se non questa, <che è soltanto una espressione verbale>*" (A. De Moivre, da "**The Doctrine de chances**", 1711)

Prezi

Il contesto filosofico

"...anche i filosofi sono generalmente d'accordo che ciò che il volgo chiama ***caso,*** *non è altro che una causa segreta e nascosta" (D. Hume da "**A Treatise of Human Nature**", 1739)*

*"Si ammette da tutti che nulla esiste senza una causa della sua esistenza e che il caso, quando si esamini con rigore, è una parola puramente negativa e non significa alcun reale potere che esista in qualche parte della natura" (D. Hume, "**Philosophical Essay**", 1748)*

*"Tutti gli avvenimenti, anche quelli che per la loro piccolezza sembrano non ubbidire alle grandi leggi della natura, ne sono una coseguenza necessaria come lo sono le rivoluzioni del Sole" (S. Laplace, "**Essai philosophique sur les probabilites**", 1814)*

Prezi

Il contesto filosofico

Qualunque sia il concetto che, anche da un punto di vista metafisico, possiamo farci della *libertà del volere*, non v'è dubbio che le sue manifestazioni, cioè le azioni umane, sono determinate da leggi naturali universali così come ogni altro fatto della natura. La storia, che si propone di trattare queste manifestazioni, per quanto profondamente occulte possano essere le loro cause, fa tuttavia sperare di essere in grado di scoprire nel gioco della libertà umana, considerato in grandi proporzioni, un ordine per cui ciò che nei singoli individui si rivela confuso e irregolare, nella totalità della specie possa riconoscersi come sviluppo continuato e costante, anche se lento, delle sue tendenze originarie. Così i matrimoni, le nascite che ne derivano, le morti, che sono fatti in così larga misura determinati dalla libera volontà umana, non sembrano sottoposti a regola alcuna che permetta di calcolarne in precedenza il numero; eppure le registrazioni annuali compiute nei grandi paesi dimostrano che tali fatti avvengono secondo leggi naturali costanti al pari delle variabili condizioni atmosferiche. [17]

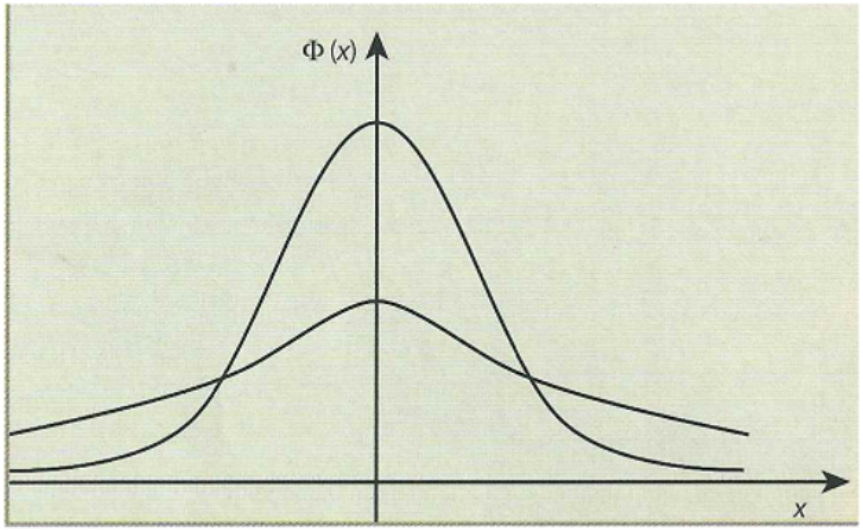
(I. Kant, da "**Idee zu einer allgemeinen Geschichte in weltburgerlicher Absicht**" (Idee per la filosofia della storia dell'umanità), 1784)

Prezi

"**Theoria motus corporum coelestium**" esce nel 1809. E' in questa voluminosa opera che Gauss, avanzando una serie di ipotesi sulle osservazioni sperimentali e sulla tipologia degli errori che si commettono quando si effettuano le relative misurazioni, deduce la funzione con cui si distribuiscono gli errori, ovvero la famosa curva a campana, meglio nota come gaussiana, al centro di questa nostra storia.

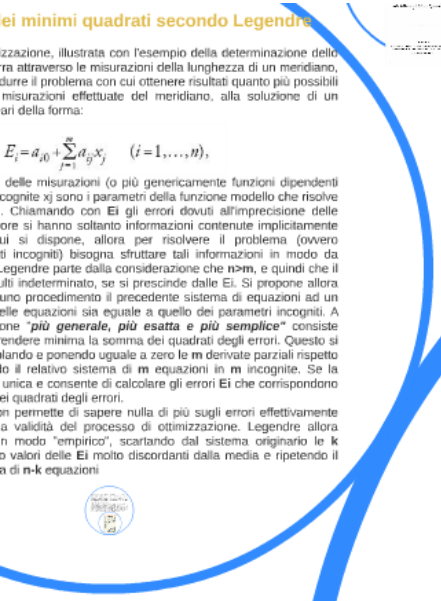
$$\phi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

dove h è costante (*coefficiente di precisione*) ed $e = 2{,}71828...$



La «curva degli errori» o «gaussiana» per due diversi valori del coefficiente di precisione h.

Prezi



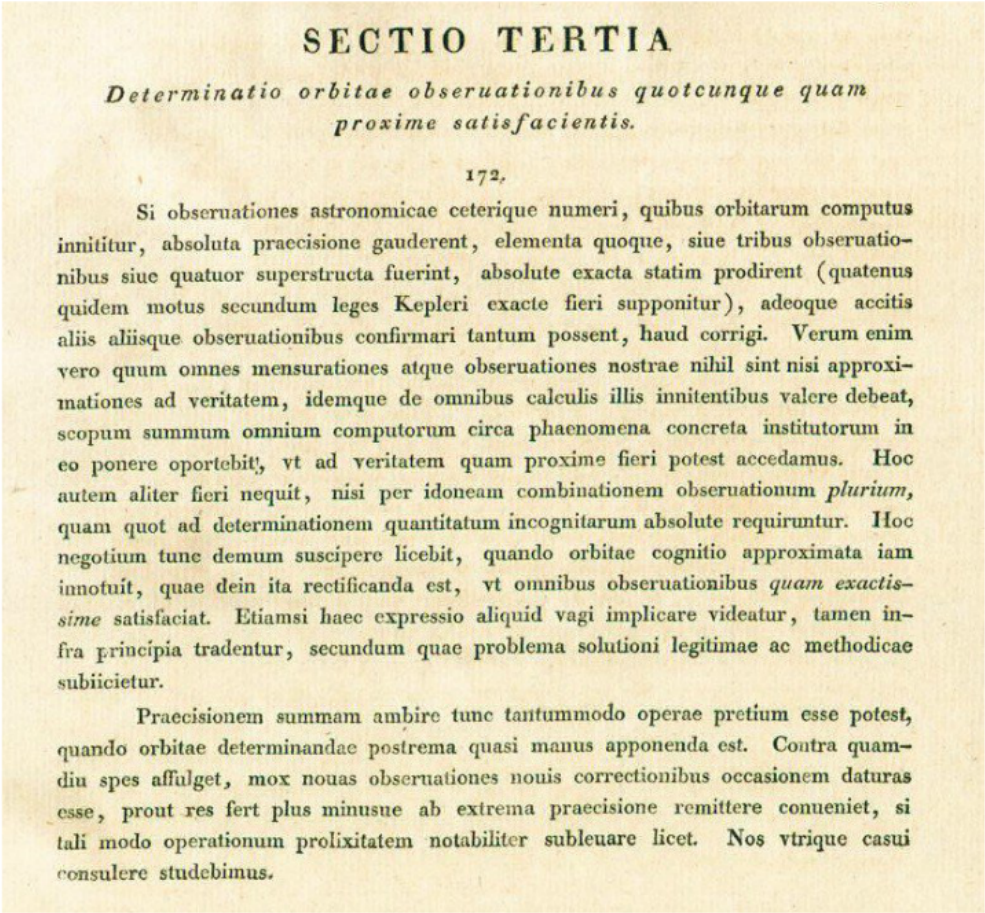
ei minimi quadrati secondo Legendre

izzazione, illustrata con l'esempio della determinazione dello
rra attraverso le misurazioni della lunghezza di un meridiano,
durre il problema con cui ottenere risultati quanto più possibili
misurazioni effettuate del meridiano, alla soluzione di un
ari della forma:

$$E_i = a_{j0} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

delle misurazioni (o più genericamente funzioni dipendenti
cognite xj sono i parametri della funzione modello che risolve
. Chiamando con **Ei** gli errori dovuti all'imprecisione delle
ore si hanno soltanto informazioni contenute implicitamente
ui si dispone, allora per risolvere il problema (ovvero
ti incogniti) bisogna sfruttare tali informazioni in modo da
Legendre parte dalla considerazione che **n>m**, e quindi che il
ulti indeterminato, se si prescinde dalle Ei. Si propone allora
uno procedimento il precedente sistema di equazioni ad un
elle equazioni sia eguale a quello dei parametri incogniti. A
one ***"più generale, più esatta e più semplice"*** consiste
rendere minima la somma dei quadrati degli errori. Questo si
olando e ponendo uguale a zero le **m** derivate parziali rispetto
lo il relativo sistema di **m** equazioni in **m** incognite. Se la
unica e consente di calcolare gli errori **Ei** che corrispondono
ei quadrati degli errori.
on permette di sapere nulla di più sugli errori effettivamente
a validità del processo di ottimizzazione. Legendre allora
n modo "empirico", scartando dal sistema originario le **k**
o valori delle **Ei** molto discordanti dalla media e ripetendo il
a di **n-k** equazioni

Gauss deduce la funzione di distribuzione degli errori trattando i dati sperimentali raccolti per calcolare le orbite di asteroidi e comete con un metodo di ottimizzazione, il metodo dei minimi quadrati.



SECTIO TERTIA

Determinatio orbitae obseruationibus quotcunque quam proxime satisfacientis.

172.

Si obseruationes astronomicae ceterique numeri, quibus orbitarum computus innititur, absoluta praecisione gauderent, elementa quoque, siue tribus obseruationibus siue quatuor superstructa fuerint, absolute exacta statim prodirent (quatenus quidem motus secundum leges Kepleri exacte fieri supponitur), adeoque accitis aliis aliisque obseruationibus confirmari tantum possent, haud corrigi. Verum enim vero quum omnes mensurationes atque obseruationes nostrae nihil sint nisi approximationes ad veritatem, idemque de omnibus calculis illis innitentibus valere debeat, scopum summum omnium computorum circa phaenomena concreta institutorum in eo ponere oportebit, vt ad veritatem quam proxime fieri potest accedamus. Hoc autem aliter fieri nequit, nisi per idoneam combinationem obseruationum *plurium*, quam quot ad determinationem quantitatum incognitarum absolute requiruntur. Hoc negotium tunc demum suscipere licebit, quando orbitae cognitio approximata iam innotuit, quae dein ita rectificanda est, vt omnibus obseruationibus *quam exactissime* satisfaciat. Etiamsi haec expressio aliquid vagi implicare videatur, tamen infra principia tradentur, secundum quae problema solutioni legitimae ac methodicae subiicietur.

Praecisionem summam ambire tunc tantummodo operae pretium esse potest, quando orbitae determinandae postrema quasi manus apponenda est. Contra quamdiu spes affulget, mox nouas obseruationes nouis correctionibus occasionem daturas esse, prout res fert plus minusue ab extrema praecisione remittere conueniet, si tali modo operationum prolixitatem notabiliter subleuare licet. Nos vtrique casui consulere studebimus.

mancato uso del simbolo di integrazi

La media aritmetica

Gauss dedusse il proprio metodo di ottimizzazione - quello che diventerà universalmente noto come **metodo dei minimi quadrati** - assumendo la media aritmetica dei dati misurati relativi ad una o più grandezze fisiche come il valore sperimentale migliore e quindi più vicino al "valore vero" della misura stessa.
Si trattava di un'ipotesi ormai "abbastanza acquisita" in campo scientifico nella seconda metà del settecento. Uno dei meriti di Gauss è però quello di avvicinare esplicitamente la misura di grandezze sperimentali al calcolo delle probabilità, dando inizio alla prima teoria del calcolo degli errori in fisica.

L'utilizzo della media aritmetica per scegliere la misura più attendibile tra più misure sperimentali disponibili, all'inizio del secolo XIX non era una pratica NUOVA.,

Secondo Jed Z.Buchwald '(**Misure discrepanti e conoscenza sperimentale all'inizio dell'età moderna**, 2006) *"l'utilizzo della media per produrre un singolo risultato da misure di laboratorio discordanti sembra essere stato fatto per primo dal giovane Newton nelle sue indagini ottiche dal tardo 1660 all'inizio del 1670."*

Fu Roger Cotes (1682-1716) nella sua opera postuma **"Harmonia mensurarum"**, uscita nel 1722 a sostenere per primo, in una prosa peraltro piuttosto oscura, come la media aritmetica di più misure effettuate per la stessa grandezza fisica, fosse da preferire - in termini di precisione - alle singole misure effettuate per la stessa grandezza.

Prezi

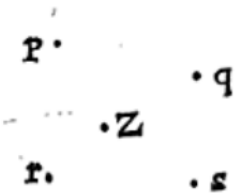
ratica le misure erano molte di più, per gli inevitabili errori di
nisurazione e per le deviazioni locali dalla forma generale del
ostro pianeta.
Questo problema scientifico era tuttavia connesso fortemente
on la navigazione, la determinazione delle rotte, la cartografia
d in ultima istanza con le esplorazioni.

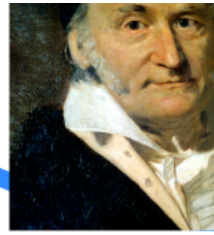
La teoria matematica degli errori si suddivide fin dagli inizi nella teoria dell'errore massimo — che si occupa della massima deviazione Δf del valore di una funzione f, in generale di più variabili, dal valore nominale $f(x,y,\ldots)$ dipendente dalla variazione dell'errore delle variabili entro determinati limiti Δx, Δy, ... — e nella teoria del valore più probabile di una funzione, a partire da una serie di valori misurati e dal loro grado di precisione.
Alla riflessione sul valore più probabile di una serie di osservazioni si accompagna la convinzione che l'espressione matematica delle leggi naturali deve essere semplice: una volta che una legge è stata prevista o dedotta, una conferma sommaria è sufficiente. Differenze nelle misure non giustificano dubbi sulla validità della legge, in quanto mettono vorbanto in discussione l'esattezza delle misure.
Cotes nella sua opera postuma si occupa prevalentemente del primo dei problemi connessi al calcolo dell'errore.

Da **Harmonia mensurarum di R. Cotes, 1722, pag. 22**

22 ÆSTIMATIO ERRORUM

Ad eundem fere modum in aliis casibus Limites inveniuntur Errorum qui ex minus accuratis observationibus ortum ducunt, quin & Positiones ad Observandum commodissimæ deprehenduntur: ut mihi vix quidquam ulterius desiderari videatur postquam ostensum fuerit qua ratione Probabilitas maxima in his rebus haberi possit, ubi diversæ Observationes, in eundem finem institutæ, paullulum diversas ab invicem conclusiones exhibent. Id autem fiet ad modum sequentis Exempli. Sit p locus Objecti alicujus ex Observatione prima definitus, q, r, s ejusdem Objecti loca ex Observationibus subsequentibus; sint insuper P, Q, R, S pondera reciproce proportionalia spatiis Evagationum, per quæ se diffundere possint Errores ex Observationibus singulis prodeuntes, quæque dantur ex datis Errorum Limitibus; & ad puncta p, q, r, s posita intelligantur pondera P, Q, R, S, & inveniatur eorum gravitatis centrum Z: dico punctum Z fore Locum Objecti maxime probabilem, qui pro vero ejus loco tutissime haberi potest.





ERERE da parte

iuto come il più grande
nento avvenne il 1
Piazzi annotò

**del Jupiter , ma simile a
valutati dell'ottavo
io che sia un altro che
o ho ripetuto le mie
non corrispondeva, nel
ex di osservazione, ho
la sua accuratezza. Ho
e potrebbe essere una
mio sospetto è stato
urato che non era una
noscere, ho aspettato
uto la soddisfazione di
elocità, come nei giorni**

orni, ma poi si perse nel
lcolo della sua orbita e
posizione prevista Un
newtoniana e un nuovo
pubblica questi e altri
ria motus corporum

Il metod

Tratto da "Gauss", coll

dati sperimentali
a media

cho's right ascensions for α *Arietis*

RATIVE REDUCTION

0'26"
0'24"
0'27"

Prezi

Stima degli errori

"*...All'incirca nello stesso modo che in altri casi si trovano i margini degli errori derivanti da osservazioni meno accurate, dovute a posizioni meno appropriate per la misura, al punto che i valori sono molto diversi tra loro...*

Sia p la posizione di un qualche corpo definito in base alla prima misura, q, r, s le posizioni del medesimo corpo in base alle successive misure: siano quindi P, Q, R, S i pesi reciprocamente proporzionali agli intervalli entro cui si collocano gli errori delle osservazioni stesse: P, Q, R, S si pensino dunque corrispondenti ai valori p, q, r, s, ovvero alle misure di posizione del corpo e si determini quindi il loro baricentro Z: dico che tale valore Z sarà il luogo più credibile in cui collocare la posizione vera del corpo."

Prezi

Stima degli errori

"...Affinchè nello stesso modo che in altri casi si trovano i margini degli errori derivanti da osservazioni meno accurate, dovute a posizioni meno appropriate per la misura, al punto che i valori sono molto diversi tra loro...

Sia p la posizione di un qualche corpo definito in base alla prima misura, q, r, s le posizioni del medesimo corpo in base alle successive misure: siano quindi P, Q, R, S i pesi reciprocamente proporzionali agli intervalli entro cui si collocano gli errori delle osservazioni stesse: P, Q, R, S si pensino dunque corrispondenti ai valori p, q, r, s, ovvero alle misure di posizione del corpo e si determini quindi il loro baricentro Z: dico che tale valore Z sarà il luogo più credibile in cui collocare la posizione vera del corpo."

Cotes si occupa di ***media aritmetica*** e quindi di ***calcolo dell'errore affrontando 28 problemi di geometria*** nella terza sezione della sua opera postuma **Harmonia mensurarum**. In uno di questi, ad esempio, si propone di determinare la variazione dei lati e degli angoli di un triangolo piano o sferico, definiti secondo una formula trigonometrica, quando i termini che intervengono nella stessa e che sono il risultato di misurazioni, variano di una data quantità. Egli suppone dapprima che due dei sei elementi da determinare siano prefissati, cioè esatti e quindi formula il problema rispetto ad una variabile. In uno scolio successivo formula a parole la legge generale di propagazione dell'errore relativo ai dati misurati.

"*Supponiamo", scrive "che l'errore cercato di una grandezza A sia dovuto agli errori compiuti sulle quantità B, C e D. Si determini allora il valore di A a partire dai valori di B, C e D, e la sua derivata con il metodo di Newton. Sostituendo alle derivate gli errori di B, C e D col segno positivo o negativo si ottiene l'errore sulla quantità A. Gli errori di cui parliamo sono infatti tanto più vicini alle loro derivate quanto più sono piccoli."*

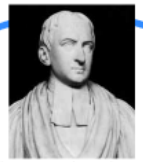
Cotes prova poi a determinare, in alcuni casi di trigonometria, i valori delle variabili indipendenti B, C e D per i quali è massimo il valore della quantità dipendente A, al variare degli errori commessi su B, C e D. L'interesse maggiore di Cotes è dunque rivolto a valutare la propagazione degli errori, soprattutto nel calcolo di grandezze trigonometriche.

Prezi

La teoria matematica degli errori si suddivide fin dagli inizi nella teoria dell'errore massimo – che si occupa della massima deviazione Δf del valore di una funzione f, in generale di più variabili, dal valore nominale $f(x,y,\ldots)$ dipendente dalla variazione dell'errore delle variabili entro determinati limiti Δx, Δy,… – e nella teoria del valore più probabile di una funzione, a partire da una serie di valori misurati e dal loro grado di precisione.

Alla riflessione sul valore più probabile di una serie di osservazioni si accompagna la convinzione che l'espressione matematica delle leggi naturali deve essere semplice: una volta che una legge è stata prevista o dedotta, una conferma sommaria è sufficiente. Differenze nelle misure non giustificano dubbi sulla validità della legge, in quanto mettono soltanto in discussione l'esattezza delle misure.

Cotes nella sua opera postuma si occupa prevalentemente del primo dei problemi connesso al calcolo dell'errore.

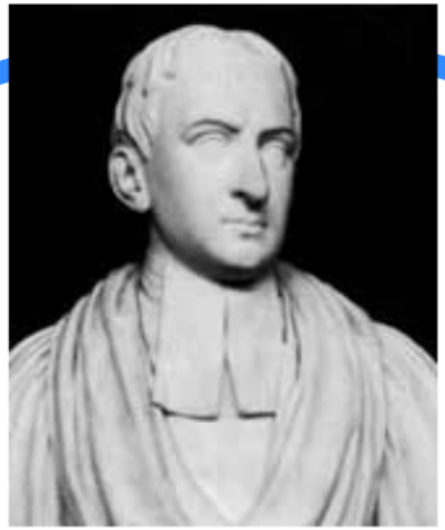


Cotes, allievo di Newton, insegnò astronomia e filosofia sperimentale al Trinity College di Cambridge. Dal 1709-1713, Cotes venne fortemente coinvolto nella revisione e quindi stampa della seconda edizione dei **Principia** di Newton.

La prima edizione dell'opera era uscita in poche copie stampate ed inoltre Newton aveva nel frattempo ampliato e aggiunto alcune parti, senza però interessarsi troppo ad una possibile riedizione dell'opera. Sembra sia stata proprio la passione e l'impegno profuso da Cotes a trascinare Newton nell'impresa. I due hanno trascorso quasi tre anni e mezzo a collaborare sul lavoro, che poi ha visto la luce in 750 copie stampate.

E' ragionevole pensare che Cotes abbia mutuato la sua convinzione sul valore della media aritmetica in ambito sperimentale proprio dal suo maestro, che sembra sia stato il primo a farne direttamente uso in questi termini nell'Ottica.

Prezi



Cotes, allievo di Newton, insegnò astronomia e filosofia sperimentale al Trinity College di Cambridge. Dal 1709-1713, Cotes venne fortemente coinvolto nella revisione e quindi stampa della seconda edizione dei **Principia** di Newton.
La prima edizione dell'opera era uscita in poche copie stampate ed inoltre Newton aveva nel frattempo ampliato e aggiunto alcune parti, senza però interessarsi troppo ad una possibile riedizione dell'opera. Sembra sia stata proprio la passione e l'impegno profuso da Cotes a trascinare Newton nell'impresa. I due hanno trascorso quasi tre anni e mezzo a collaborare sul lavoro, che poi ha visto la luce in 750 copie stampate.
E' ragionevole pensare che Cotes abbia mutuato la sua convinzione sul valore della media aritmetica in ambito sperimentale proprio dal suo maestro, che sembra sia stato il primo a farne direttamente uso in questi termini nell'Ottica.

Prezi

26°0′14″
26°0′4″
26°0′28″
26°0′39″

L'elaborazione dei dati sperimentali prima della media

Table B4. Coordinates for each of Tycho's compensated pairs for α *Arietis*[218]

TYPE	DATE	OBSERVATION	ARITHMETIC MEAN
E	1582 February 27	26°4′16″	26°0′20″
W	1585 September 21	25°56′23″	
E	1582 March 5	25°56′33″	26°0′38″
W	1585 September 14	26°4′43″	
E	1582 March 5	25°59′15″	26°0′18″
W	1585 September 15	26°1′21″	
E	1582 March 9	25°59′49″	26°0′32″
W	1585 September 15	26°1′16″	
E	1586 December 26	25°54′51″	26°0′42″
W	1588 December 15	26°6′32″	
E	1586 December 27	25°52′22″	26°0′37″
W	1588 November 29	26°8′52″	
E	1587 January 9	26°2′5″	26°0′27″
W	1588 December 6	25°58′49″	
E	1587 January 24	26°6′44″	26°0′29″
W	1588 October 26	25°54′13″	
E	1587 August 17	26°5′40″	26°0′14″
W	1588 April 16	25°54′48″	
E	1587 August 17	26°1′1″	26°0′4″
W	1588 April 16	25°59′6″	
E	1587 August 18	25°54′35″	26°0′28″
W	1588 March 28	26°6′20″	
E	1587 August 18	25°54′49″	26°0′39″
W	1588 April 16	26°6′30″	

I dati elaborati da T

Tycho (1546-1601) elaborav
con una serie di algoritmi

Prezi

fundere possi
singulis prode
ad puncta p,
inveniatur eo
cum Objecti
haberi potest.

L'elaborazione dei dati sperimentali prima della media

Table B5. The reduction applied to Tycho's right ascensions for *α Arietis*

PAIRED MEAN	ITERATIVE REDUCTION
26°0′44″	
26°0′32″	26°0′38″
26°0′30″	26°0′34″
26°0′20″	26°0′27″
26°0′38″	26°0′32.5″
26°0′18″	26°0′25.25″
26°0′32″	26°0′28.63″
26°0′42″	26°0′35.31″
26°0′37″	26°0′36.16″
26°0′27″	26°0′31.58′
26°0′29″	26°0′30.29″
26°0′14″	26°0′22.14″
26°0′4″	26°0′13.07″
26°0′28″	26°0′20.54″
26°0′39″	**26°0′29.78″**

lati sperimentali
media

o's compensated pairs for *α Arietis*[218]

	ARITHMETIC MEAN
4′16″	26°0′20″
56′23″	

s

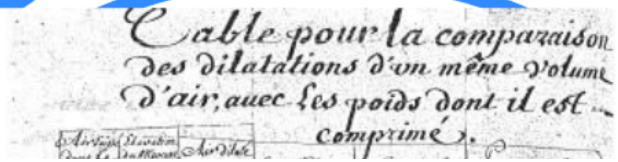


Table pour la comparaison
des dilatations d'un même volume
d'air, avec les poids dont il est
comprimé.

26°0′39″

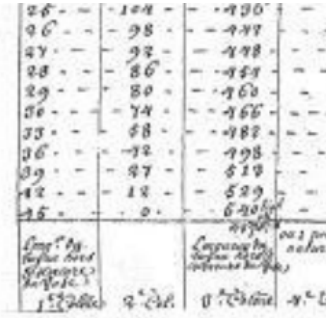


Fig. A2. Pa

I dati elaborati da Tycho Brahe

Tycho (1546-1601) elaborava le proprio osservazioni con una serie di algoritmi che pesavano in modo diverso le serie di dati osservativi raccolti. **(Tabella B4 e 5)**. Non si trattava della sola media aritmetica, ma di una sorta di incrocio tra quella e una media pesata. Non entrerò nel dettaglio, poichè ciò non è necessario alla mia trattazione, ma per questo rimando all'articolo di Buchwald già citato.

Lo stesso farà Keplero (1571-1630), "erede" dell'enorme mole di dati raccolti da Tycho in campo astronomico.

Prezi

I taccuini di lavoro di Parent e la legge di Boyle-Mariotte

Un altro rilevante caso di rielaborazione "ad hoc" di dati sperimentali analizzato da Buchwald nell'articolo già citato, è quello relativo alla genesi nella formulazione della famosa legge di Boyle-Mariotte.
Senza entrare in dettagli che esulano dagli obiettivi di questa presentazione, diremo che il trattamento dei dati sperimentali avveniva attraverso algoritmi poco chiari o comunque non giustificati in modo rigoroso, sia sul piano sperimentale che su quello strettamente fisico-matematico.

Prezi

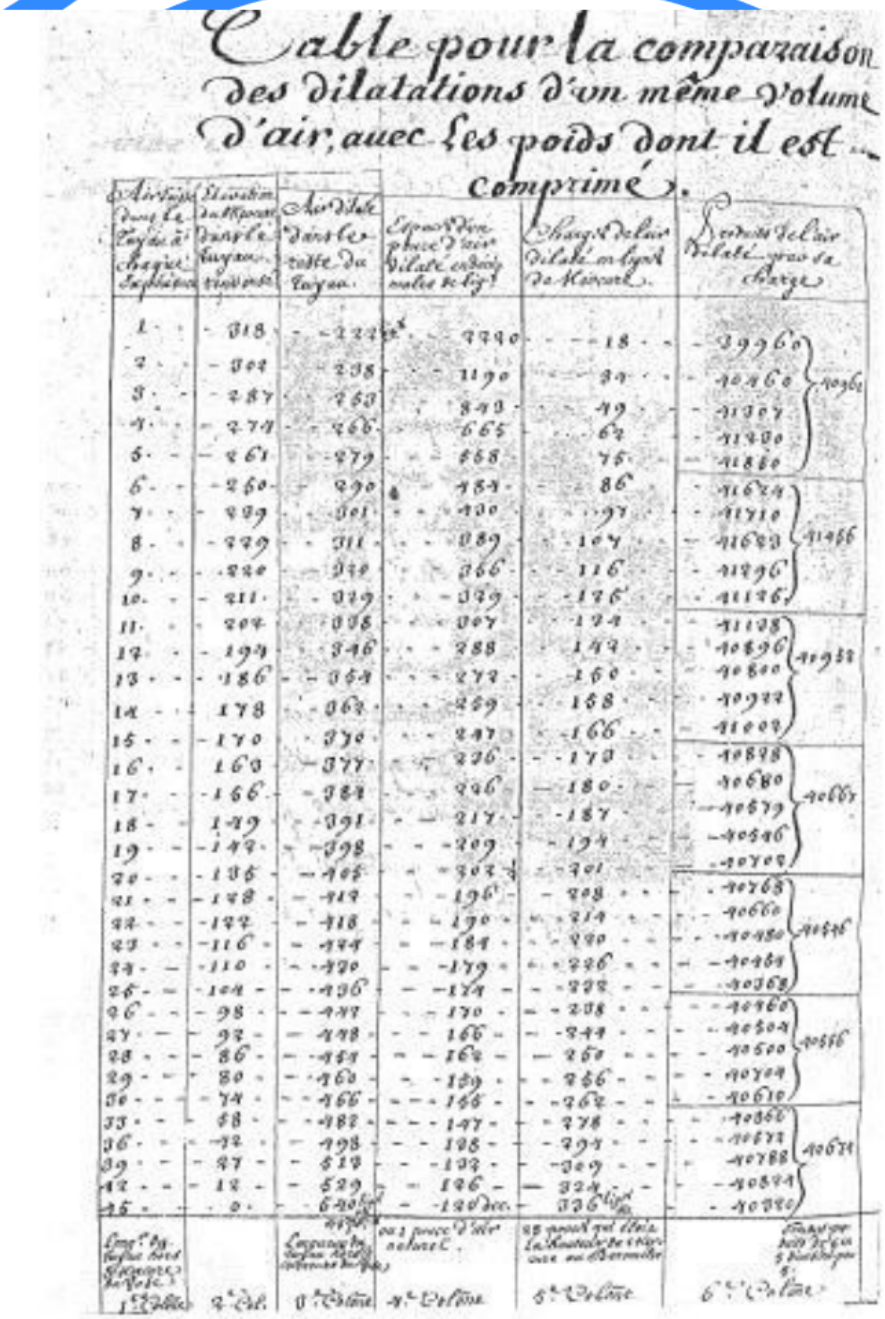


Table pour la comparaison des dilatations d'un même volume d'air, avec les poids dont il est comprimé.

Fig. A2. Parent's table (1708)

Un altro rileva
dati speriment
già citato, è
formulazione d
Senza entrare
di questa pres
dei dati speri
poco chiari o
rigoroso, sia s
strettamente fi

ycho Brahe

a le proprie osservazioni

L'apparato sperimentale di Mariotte

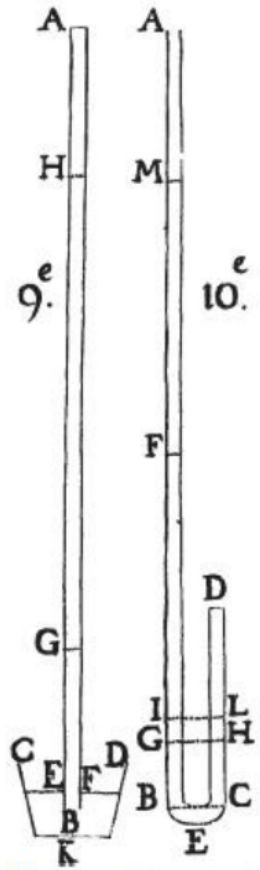
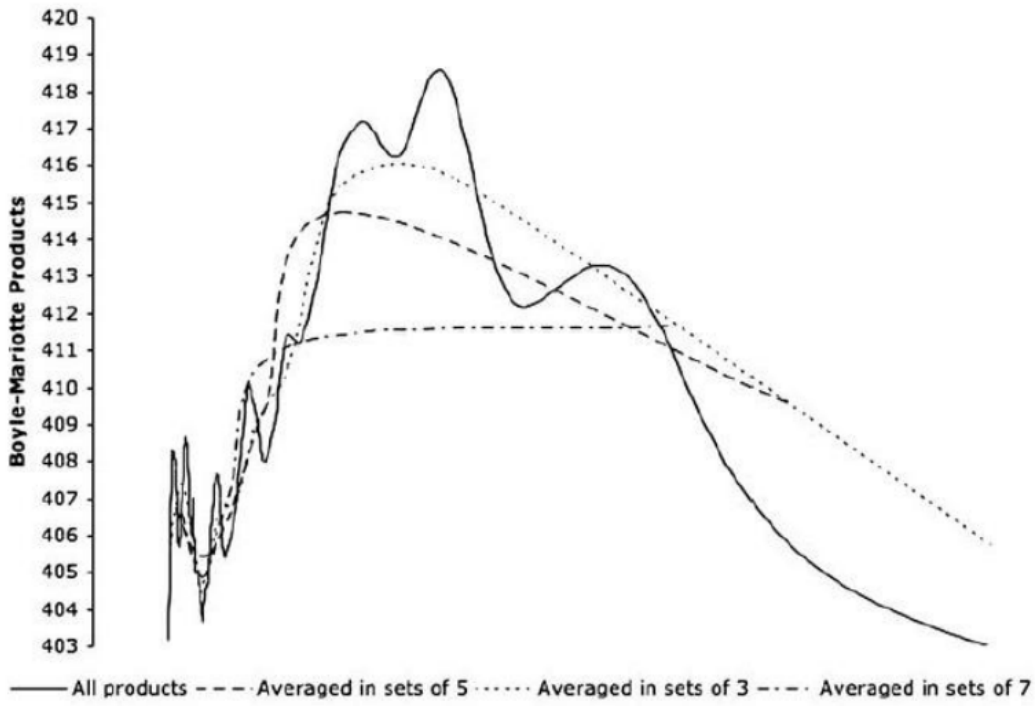
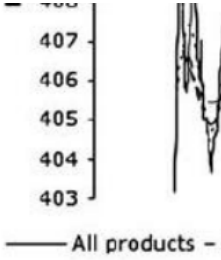


Fig. A1. Mariotte's spring of the air experiments

Elaborazione dati esperimento di Mariotte-Boyle



l grafico che
Mariotte



La rielaborazione dei dati ed il grafico che esemplifica la legge di Boyle-Mariotte

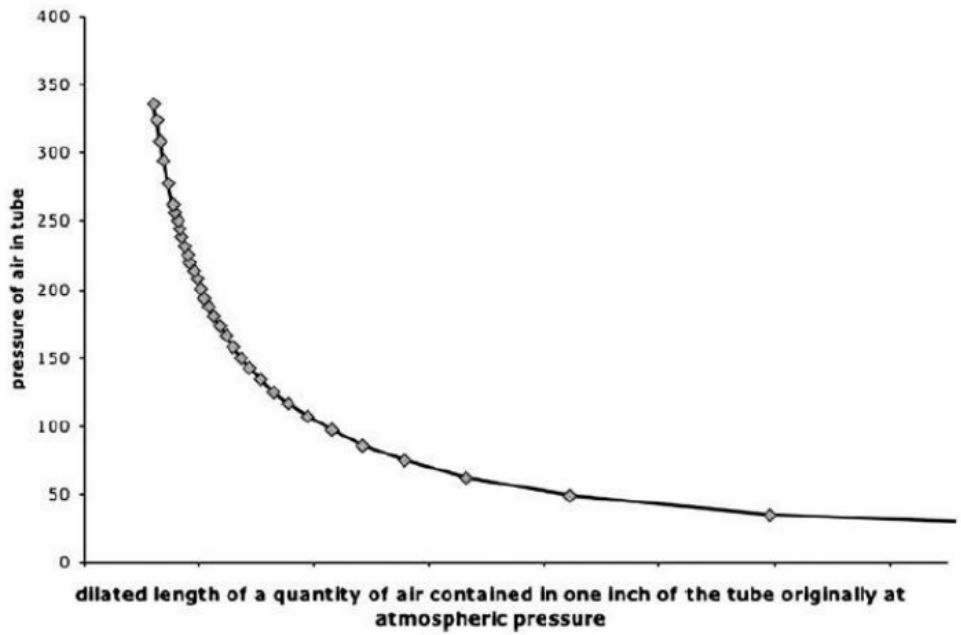


Fig. A3. Graphs of Parent's data[195]

Prezi

luzione

, x2, x3, … siano
azioni fisicamente

ni) dipendenti dalle
parametri incogniti
i sono osservabili

II secolo occorreva
Terra, ipotizzata da
aggio equatoriale A

arco meridiano, in

All'opera postuma di Cotes ed ai suoi risultati nel calcolo dell'errore, fa riferimento vent'anni dopo, Nicolas-Louis de Lacaille (1713-1762) in un lavoro di trigonometria sferica del 1741 pubblicato nei "**Mémoires de l'Académie Royale des Sciences**". Lacaille è matematico e astronomo nella Francia del XVIII e come Pierre Bouguer nel 1749, Johann Jacob Marinoni nel 1751 e Abraham Gotthelf Kästner nel 1753, suoi contemporanei, è interessato alla propagazione degli errori nelle funzioni trigonometriche, indispensabili per determinare le posizioni delle stelle e la misura dell'arco di un meridiano terrestre, problema tra i più importanti, lasciati aperti da Newton e dalle sue ipotesi sulla forma della Terra.

Louis de Lacaille

Pierre Bouguer

Jacob Marinoni

Gotthelf Kastner

A

La
mo
Bos
exp
Gra
ovv

imp

La
equ
La
pro
prin
attr

Il problema e la sua soluzione

Si supponga che m grandezze incognite x1, x2, x3, … siano legate da un sistema ridondante di n equazioni fisicamente indipendenti (m<n):

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \ldots = l_i$$

in cui gli **ai (i = 1,...n)** sono valori (o funzioni) dipendenti dalle misurazioni effettuate, **x1, x2, ..., xm** sono parametri incogniti della funzione che risolve il problema e **li** sono osservabili soggetti agli inevitabili errori di osservazione.

Il classico problema che fin dall'inizio del XVIII secolo occorreva risolvere era quello relativo alla forma della Terra, ipotizzata da Newton in un elissoide di rotazione, con il raggio equatoriale A maggiore del raggio polare B.

Se in linea teorica servivano due misure di arco meridiano, in pratica le misure erano molte di più, per gli inevitabili errori di misurazione e per le deviazioni locali dalla forma generale del nostro pianeta.

Questo problema scientifico era tuttavia connesso fortemente con la navigazione, la determinazione delle rotte, la cartografia ed in ultima istanza con le esplorazioni.

Lou

Prezi

l calcolo
e Lacaille
del 1741
ciences".
ll e come
l 1751 e
oranei, è
funzioni
ioni delle
blema tra
otesi sulla

o Marinoni

Alle origini del metodo dei minimi quadrati

La risoluzione del sistema di equazioni lineari venne affrontato in vari modi. Per la nostra storia, citeremo solo quello del gesuita Ruggero Boscovich (1711-1787), che nel 1755 nella sua opera "**De Litteraria expeditione per pontificiam ditionem annuncio dimetiendos duo Gradus Meridiani**" considerando gli scarti tra dati osservati e dati teorici, ovvero assumendo

$$E_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

imponeva le seguenti condizioni sugli errori

E1 + E2 + … + En = 0 e |E1| + |E2| + … + |En| = minimo

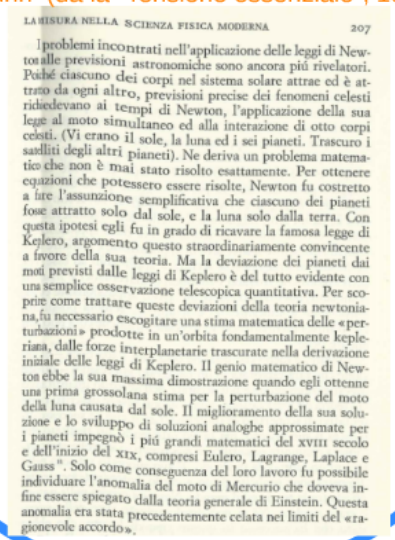
La prima di queste condizioni poteva essere evitata sommando tutte le **m** equazioni del sistema lineare e riducendo a **m-1** le incognite.
La seconda condizione invece porterà al metodo dei minimi quadrati proposto da Legendre in un lavoro del 1805, ma rivendicato come primogenitura anche da Gauss, in una contesa scientifica risoltasi poi, attraverso la mediazione di Laplace, in una sorta di diplomatico pareggio.

Prezi

Il metodo dei minimi quadrati è in sostanza la possibile soluzione di un problema molto più ampio: come trattare e quindi risolvere le discrepanze tra misure sperimentali e modelli matematici di riferimento ?

Alla fine del XVIII secolo era ormai indilazionabile **una teoria della misura** coerente. Soprattutto in astronomia il problema quantitativo di inquadrare i dati osservativi nei modelli previsionali della meccanica newtoniana era tutt'altro che risolto.

"La misura nella scienza fisica moderna di T. Kuhn (da la "Tensione essenziale", 1985)



LA MISURA NELLA SCIENZA FISICA MODERNA 207

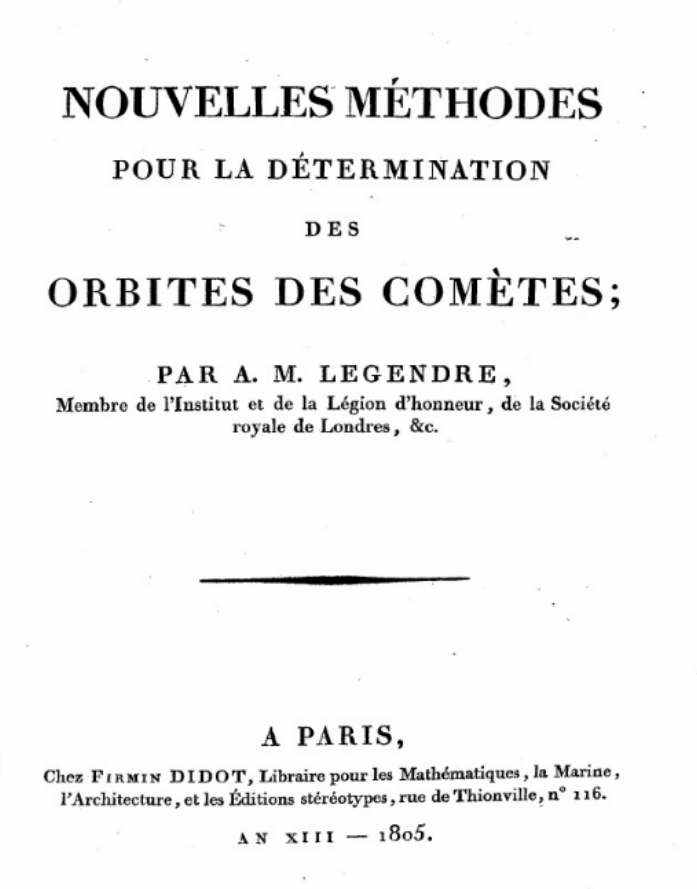
I problemi incontrati nell'applicazione delle leggi di Newton alle previsioni astronomiche sono ancora piú rivelatori. Poiché ciascuno dei corpi nel sistema solare attrae ed è attratto da ogni altro, previsioni precise dei fenomeni celesti richiedevano ai tempi di Newton, l'applicazione della sua legge al moto simultaneo ed alla interazione di otto corpi celesti. (Vi erano il sole, la luna ed i sei pianeti. Trascuro i satelliti degli altri pianeti). Ne deriva un problema matematico che non è mai stato risolto esattamente. Per ottenere equazioni che potessero essere risolte, Newton fu costretto a fare l'assunzione semplificativa che ciascuno dei pianeti fosse attratto solo dal sole, e la luna solo dalla terra. Con questa ipotesi egli fu in grado di ricavare la famosa legge di Keplero, argomento questo straordinariamente convincente a favore della sua teoria. Ma la deviazione dei pianeti dai moti previsti dalle leggi di Keplero è del tutto evidente con una semplice osservazione telescopica quantitativa. Per scoprire come trattare queste deviazioni della teoria newtoniana, fu necessario escogitare una stima matematica delle «perturbazioni» prodotte in un'orbita fondamentalmente kepleriana, dalle forze interplanetarie trascurate nella derivazione iniziale delle leggi di Keplero. Il genio matematico di Newton ebbe la sua massima dimostrazione quando egli ottenne una prima grossolana stima per la perturbazione del moto della luna causata dal sole. Il miglioramento della sua soluzione e lo sviluppo di soluzioni analoghe approssimate per i pianeti impegnò i piú grandi matematici del XVIII secolo e dell'inizio del XIX, compresi Eulero, Lagrange, Laplace e Gauss [illegible]. Solo come conseguenza del loro lavoro fu possibile individuare l'anomalia del moto di Mercurio che doveva infine essere spiegato dalla teoria generale di Einstein. Questa anomalia era stata precedentemente celata nei limiti del «ragionevole accordo».

I problemi incontrati nell'applicazione delle leggi di Newton alle previsioni astronomiche sono ancora piú rivelatori. Poiché ciascuno dei corpi nel sistema solare attrae ed è attratto da ogni altro, previsioni precise dei fenomeni celesti richiedevano ai tempi di Newton, l'applicazione della sua legge al moto simultaneo ed alla interazione di otto corpi celesti. (Vi erano il sole, la luna ed i sei pianeti. Trascuro i satelliti degli altri pianeti). Ne deriva un problema matematico che non è mai stato risolto esattamente. Per ottenere equazioni che potessero essere risolte, Newton fu costretto a fare l'assunzione semplificativa che ciascuno dei pianeti fosse attratto solo dal sole, e la luna solo dalla terra. Con questa ipotesi egli fu in grado di ricavare la famosa legge di Keplero, argomento questo straordinariamente convincente a favore della sua teoria. Ma la deviazione dei pianeti dai moti previsti dalle leggi di Keplero è del tutto evidente con una semplice osservazione telescopica quantitativa. Per scoprire come trattare queste deviazioni della teoria newtoniana, fu necessario escogitare una stima matematica delle «perturbazioni» prodotte in un'orbita fondamentalmente kepleriana, dalle forze interplanetarie trascurate nella derivazione iniziale delle leggi di Keplero. Il genio matematico di Newton ebbe la sua massima dimostrazione quando egli ottenne una prima grossolana stima per la perturbazione del moto della luna causata dal sole. Il miglioramento della sua soluzione e lo sviluppo di soluzioni analoghe approssimate per i pianeti impegnò i piú grandi matematici del XVIII secolo e dell'inizio del XIX, compresi Eulero, Lagrange, Laplace e Gauss [11]. Solo come conseguenza del loro lavoro fu possibile individuare l'anomalia del moto di Mercurio che doveva infine essere spiegato dalla teoria generale di Einstein. Questa anomalia era stata precedentemente celata nei limiti del «ragionevole accordo».

"La misura nella scienza fisica moderna di T. Kuhn (da la "Tensione essenziale", 1985)

Prima di GAUSS: i precedenti del metodo dei minimi quadrati

In un'appendice al suo scritto sulla determinazione dell'orbita delle comete del 1805, intitolato "**Sur la méthode des moindres quarrés"**, allo scopo di risolvere un problema di ottimizzazione di dati sperimentali molto simile a quello di Gauss, Legendre aveva già proposto il metodo dei minimi quadrati.



NOUVELLES MÉTHODES

POUR LA DÉTERMINATION

DES

ORBITES DES COMÈTES;

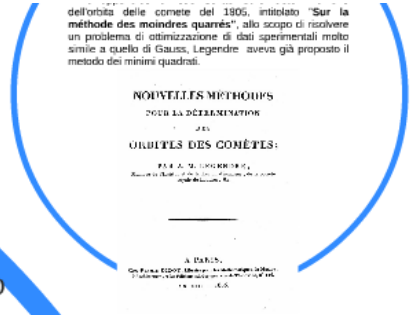
PAR A. M. LEGENDRE,

Membre de l'Institut et de la Légion d'honneur, de la Société royale de Londres, &c.

A PARIS,

Chez FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques, la Marine, l'Architecture, et les Éditions stéréotypes, rue de Thionville, n° 116.

AN XIII — 1805.



Il metodo dei minimi quadrati secondo Legendre

Sulla base di una linearizzazione, illustrata con l'esempio della determinazione dello schiacciamento della Terra attraverso le misurazioni della lunghezza di un meridiano, Legendre pensa di ricondurre il problema con cui ottenere risultati quanto più possibili esatti da una serie di misurazioni effettuate del meridiano, alla soluzione di un sistema di equazioni lineari della forma:

$$E_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

dove le aij sono i valori delle misurazioni (o più genericamente funzioni dipendenti dalle misurazioni) e le incognite xj sono i parametri della funzione modello che risolve il problema di partenza. Chiamando con **Ei** gli errori dovuti all'imprecisione delle osservazioni, sul cui valore si hanno soltanto informazioni contenute implicitamente nelle misurazioni di cui si dispone, allora per risolvere il problema (ovvero determinare i coefficienti incogniti) bisogna sfruttare tali informazioni in modo da minimizzarne il valore. Legendre parte dalla considerazione che **n>m**, e quindi che il sistema di equazioni risulti indeterminato, se si prescinde dalle Ei. Si propone allora di ridurre con un opportuno procedimento il precedente sistema di equazioni ad un altro, in cui il numero delle equazioni sia eguale a quello dei parametri incogniti. A questo punto, la soluzione "***più generale, più esatta e più semplice"*** consiste secondo Legendre, nel rendere minima la somma dei quadrati degli errori. Questo si ottiene ovviamente calcolando e ponendo uguale a zero le **m** derivate parziali rispetto alle xj, ovvero risolvendo il relativo sistema di **m** equazioni in **m** incognite. Se la soluzione esiste, essa è unica e consente di calcolare gli errori **Ei** che corrispondono al minino della somma dei quadrati degli errori.
Questo risultato però non permette di sapere nulla di più sugli errori effettivamente commessi e quindi sulla validità del processo di ottimizzazione. Legendre allora propone di procedere in modo "empirico", scartando dal sistema originario le **k** equazioni che forniscono valori delle **Ei** molto discordanti dalla media e ripetendo il procedimento sul sistema di **n-k** equazioni

Gau
dati
con

Prezi

Il calcolo dell'orbita dell'asteroide CERERE da parte di GAUSS (1809)

Nel 1801 Piazzi scoprì Cerere, oggi conosciuto come il più grande membro della cintura di asteroidi. L'avvistamento avvenne il 1 gennaio di quell'anno. Sul suo diario padre Piazzi annotò

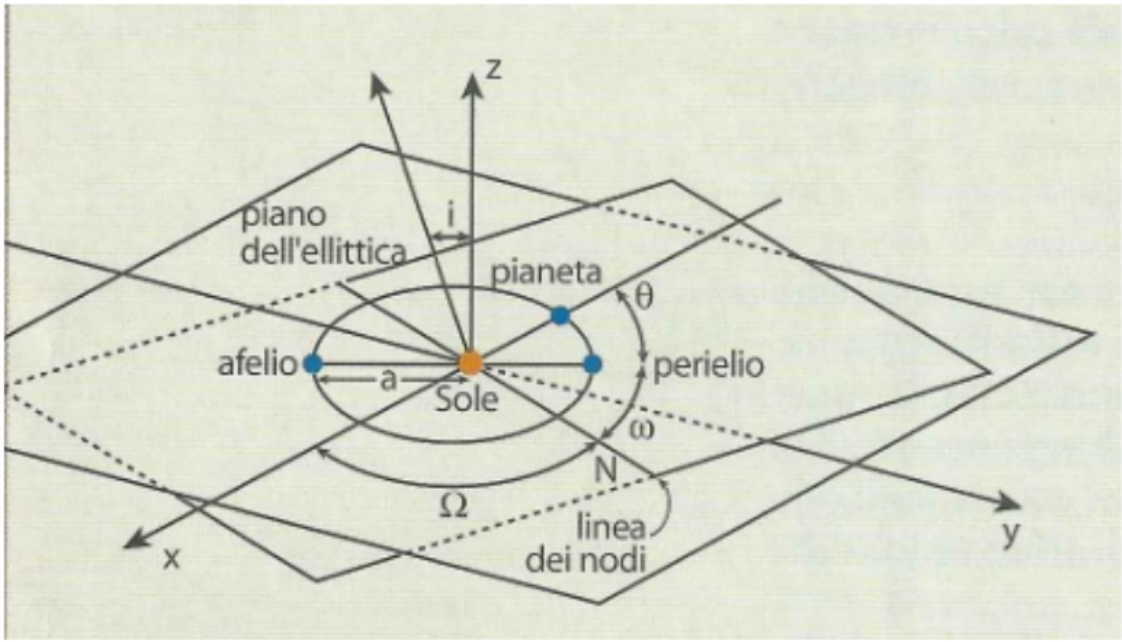
"**La luce era un po 'debole, e del colore del Jupiter , ma simile a molti altri che generalmente sono valutati dell'ottavo grandezza . Quindi ho avuto alcun dubbio che sia un altro che una stella fissa. La sera del secondo ho ripetuto le mie osservazioni, e dopo aver scoperto che non corrispondeva, nel tempo o nella distanza dal zenith con l'ex di osservazione, ho cominciato a nutrire qualche dubbio della sua accuratezza. Ho concepito dopo un grande sospetto che potrebbe essere una nuova stella. La sera del terzo, il mio sospetto è stato trasformato in certezza, essendo assicurato che non era una stella fissa. Tuttavia, prima ho fatto conoscere, ho aspettato fino alla sera del quarto, quando ho avuto la soddisfazione di vedere che si era spostato alla stessa velocità, come nei giorni precedenti**".

Cerere fu seguito per una quarantina di giorni, ma poi si perse nel bagliore del Sole. Si deve a GAUSS il calcolo della sua orbita e quindi il ritrovamento dell'asteroide nella posizione prevista Un importante successo per la meccanica newtoniana e un nuovo trionfo per il principe dei matematici che pubblica questi e altri calcoli astronomici nella citata "**Theoria motus corporum coelestium".**

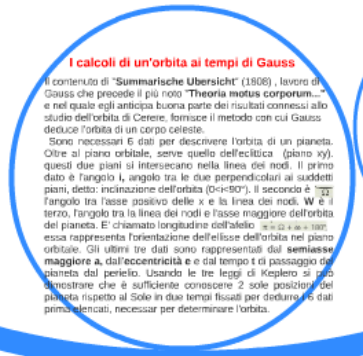
Prezi

2

Il metodo di Gauss per il calcolo delle orbite di corpi celesti



Tratto da "Gauss", collana I GRANDI DELLA SCIENZA (Le Scienze, ottobre 202)



I calcoli di un'orbita ai tempi di Gauss

Il contenuto di "**Summarische Ubersicht**" (1808) , lavoro di Gauss che precede il più noto "**Theoria motus corporum...**" e nel quale egli anticipa buona parte dei risultati connessi allo studio dell'orbita di Cerere, fornisce il metodo con cui Gauss deduce l'orbita di un corpo celeste.

Sono necessari 6 dati per descrivere l'orbita di un pianeta. Oltre al piano orbitale, serve quello dell'eclittica (piano xy). questi due piani si intersecano nella linea dei nodi. Il primo dato è l'angolo **i**, angolo tra le due perpendicolari ai suddetti piani, detto: inclinazione dell'orbita (0<i<90°). Il secondo è $\frac{\Omega}{\Omega}$ l'angolo tra l'asse positivo delle x e la linea dei nodi. **W** è il terzo, l'angolo tra la linea dei nodi e l'asse maggiore dell'orbita del pianeta. E' chiamato longitudine dell'afelio $\pi = \Omega + \omega + 180°$ essa rappresenta l'orientazione dell'ellisse dell'orbita nel piano orbitale. Gli ultimi tre dati sono rappresentati dal **semiasse maggiore a,** dall'**eccentricità e** e dal tempo **t** di passaggio del pianeta dal perielio. Usando le tre leggi di Keplero si può dimostrare che è sufficiente conoscere 2 sole posizioni del pianeta rispetto al Sole in due tempi fissati per dedurre i 6 dati prima elencati, necessar per determinare l'orbita.

Le orbite secondo Gauss

Questo tecnicamente. In pratica, ai tempi di Gauss determinazione dei 6 dati fondamentali non era semplice, poiché con il telescopio da Terra non era possibile determinare l'esatta posizione del pianeta rispetto al Sole. Si misuravano longitudine e latitudine nel sistema di riferimento terrestre, ma non si aveva alcuna informazione sulla distanza dal pianeta dalla Terra. Gauss aveva trovato il modo di calcolare, a partire da 3 sole osservazioni terrestri, 2 posizioni del pianeta rispetto al Sole in istanti fissati. Con questi dati è poi possibile determinare le 6 grandezze fondamentali prima indicate. A tal fine **Gauss introduce due differenti sistemi di riferimento uno centrato sulla Terra e uno sul Sole.** Quindi, poiché sono noti sia il moto orbitale della Terra attorno al Sole, sia latitudine e termogitudine del pianeta rispetto alla Terra in diversi istanti, sussistono relazioni matematiche tra i sistemi di riferimento che consentono a Gauss di determinare le posizioni del pianeta rispetto al Sole. I calcoli relativi sono enormemente laboriosi (80 variabili), ma gli strumenti tecnici necessari sono elementari.

Prezi

I calcoli di un'orbita ai tempi di Gauss

Il contenuto di "**Summarische Ubersicht**" (1808) , lavoro di Gauss che precede il più noto "**Theoria motus corporum...**" e nel quale egli anticipa buona parte dei risultati connessi allo studio dell'orbita di Cerere, fornisce il metodo con cui Gauss deduce l'orbita di un corpo celeste.

Sono necessari 6 dati per descrivere l'orbita di un pianeta. Oltre al piano orbitale, serve quello dell'eclittica (piano xy). questi due piani si intersecano nella linea dei nodi. Il primo dato è l'angolo **i,** angolo tra le due perpendicolari ai suddetti piani, detto: inclinazione dell'orbita (0<i<90°). Il secondo è Ω l'angolo tra l'asse positivo delle x e la linea dei nodi. **W** è il terzo, l'angolo tra la linea dei nodi e l'asse maggiore dell'orbita del pianeta. E' chiamato longitudine dell'afelio $\pi = \Omega + \omega + 180°$; essa rappresenta l'orientazione dell'ellisse dell'orbita nel piano orbitale. Gli ultimi tre dati sono rappresentati dal **semiasse maggiore a,** dall'**eccentricità e** e dal tempo **t** di passaggio del pianeta dal perielio. Usando le tre leggi di Keplero si può dimostrare che è sufficiente conoscere 2 sole posizioni del pianeta rispetto al Sole in due tempi fissati per dedurre i 6 dati prima elencati, necessar per determinare l'orbita.

L

Questo te
determina
poichè co
determina
Si misura
riferimento
informazio
Gauss ave
sole osser
al Sole in
determina
A tal fine
riferiment
Quindi, po
attorno al
rispetto al
matematic
Gauss di
Sole. I ca
variabili),
elementari

Prezi

o di
m..."
i allo
uss

aneta.
o xy).
primo
uddetti
è Ω
W è il
'orbita
+ 180°;
piano
nisse

Le orbite secondo Gauss

Questo teoricamente. In pratica, ai tempi di Gauss la determinazione dei 6 dati fondamentali non era semplice, poichè con il telescopio da Terra non era possibile determinare l'esatta posizione del pianeta rispetto al Sole. Si misuravano longitudine e latitudine nel sistema di riferimento terrestre, ma non si aveva alcuna informazione sulla distanza del pianeta dalla Terra.

Gauss aveva trovato il modo di calcolare, a partire da 3 sole osservazioni terrestri, 2 posizioni del pianeta rispetto al Sole in istanti fissati. Con questi dati è poi possibile determinare le 6 grandezze fondamentali prima indicate.

A tal fine **Gauss introduce due differenti sistemi di riferimento uno centrato sulla Terra e uno sul Sole**. Quindi, poichè sono noti sia il moto orbitale della Terra attorno al Sole, sia latitudine e lonmgitudine del pianeta rispetto alla Terra in diversi istanti, sussistono relazioni matematiche tra i sistemi di riferimento che consentono a Gauss di determinare le posizioni del pianeta rispetto al Sole. I calcoli relativi sono enormenete laboriosi (80 variabili), ma gli strumenti teorici necessari sono elementari.

Prezi

rande.

Il metodo dei minimi quadrati rivisto da GAUSS (1809)

A differenza di Legendre, nel suo primo lavoro sul metodo dei minimi quadrati, Gauss parte da una serie di ipotesi sugli errori di misura, ovvero:

1) ammette **la media aritmetica** come il valore più probabilmente "vicino" al valore "vero" della grandezza (o delle grandezze) misurata;

2) assume che la distribuzione degli errori commessi nel processo di misura sia continuo e segua l'andamento previsto da De Moivre nella seconda edizione del suo " ***The doctrine of chances***" (1738);

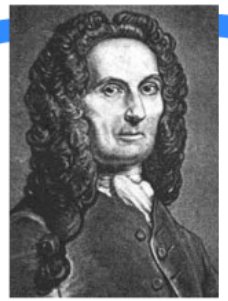
3) applica di fatto - probabilmente senza conoscerla - **la formula di Bayes della probabilità condizionata.**

Il calcolo dell'orbita dell'aster
di GAUSS

Nel 1801 Piazzi scoprì Cerere, oggi
membro della cintura di asteroidi. L'
gennaio di quell'anno. Sul suo diario

"**La luce era un po 'debole, e del c**

Prezi



Abraham de Moivre (1667-1754) era un francese ugonotto. Da giovane aveva abbandonato il suo paese, per trasferirsi a Londra, a causa delle persecuzioni religiose. Nel 1697 divenne fellow della Royal Society, tuttavia era costretto a mantenersi facendo da tutore e da consulente per i giochi d'azzardo e per i servizi assicurativi.

Il principale contributo di de Moivre fu la sua "**The doctrine of chances**" (1718), dove, a partire dalla seconda edizione, inserì la propria dimostrazione del **teorema del 'limite** di de Moivre-Laplace' pubblicata privatamente nel 1733, ma completata, a suo dire, "*almeno una dozzina di anni prima*". La sua memoria del 1712, pubblicata prima dell'"**Ars conjectandi**" di Jakob I Bernoulli, può esserne considerata una versione preliminare.

Cosa "dimostrò" De Moivre: volendo determinare la legge probabilistica connessa ad alcuni problemi, non solo nel gioco dei dadi, ottenne che per **n prove indipendenti** in ciascuna delle quali l'evento studiato aveva **probabilità p**, **il numero di successi μ** obbediva alla legge

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left[z_1 \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le z_2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2}\, dz,$$

con **q = 1-p** ed **n** sufficientemente grande.

svilupp
compo
cresce
"**The c**
oggi
pubbli
anche
Quanc
modo
introdu
di **n n**
riferim
nel dir

Il metodo dei minimi quadrati rivisto da GAUSS (1809)

A differenza di Legendre, nel suo primo lavoro sul metodo
minimi quadrati, Gauss parte da una serie di ipotesi sugli erro
misura, ovvero:

De Moivre dimostrò il suo risultato solo per **p = q**, ma affermò che la sua formula poteva essere generalizzata anche al caso in cui p e q fossero diversi tra loro.
Non si rese conto, oppure molto più probabilmente non lo fece di proposito, che la sua approssimazione dello sviluppo binomiale (ovvero del triangolo di Pascal) comportava un errore nel risultato che per valori finiti di n cresceva tanto più quanto o **p o q** si discostavano da 0,5.
"**The doctrine of chances**" era d'altra parte un'opera che oggi definiremmo divulgativa, ovvero rivolta ad un pubblico di non matematici e questo probabilmente influì anche sul rigore delle affermazioni in essa contenute.
Quando **Laplace nel 1812** dimostrò lo stesso risultato in modo rigoroso utilizzando uno sviluppo in serie e introducendo un termine di correzione che tenesse conto di **n numero finito**, citò De Moivre, ma non fornì alcun riferimento alla sua opera, per cui di fatto questa rimase nel dimenticatoio per oltre un secolo.

tto. Da giovane
, a causa delle
Society, tuttavia
ente per i giochi

e doctrine of
inserì la propria
lace' pubblicata
una dozzina di
prima dell'"**Ars**
ta una versione

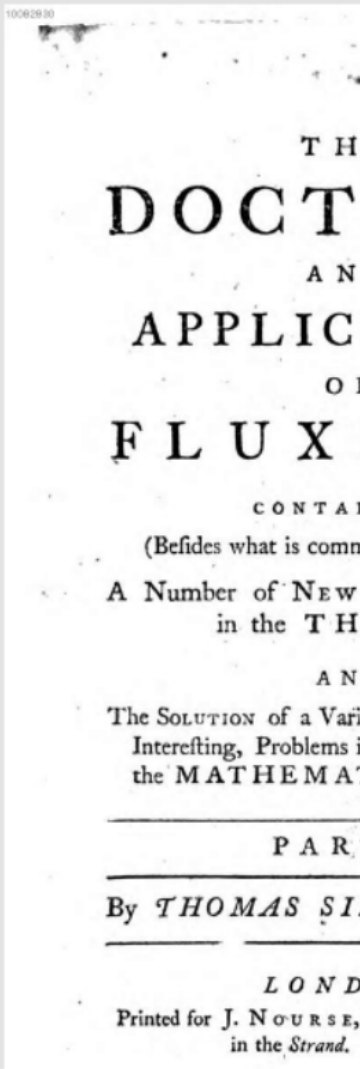
ge probabilistica
tenne che per **n**
studiato aveva

All'opera postuma di Cotes ed ai suoi risultati nel calcolo dell'errore, fa riferimento vent'anni dopo, Nicolas-Louis de Lacaille (1713-1762) in un lavoro di trigonometria sferica del 1741 pubblicato nei "**Mémoires de l'Académie Royale des Sciences**". Lacaille è matematico e astronomo nella Francia del XVIII e come Pierre Bouguer nel 1749, Johann Jacob Marinoni nel 1751 e Abraham Gotthelf Kästner nel 1753, suoi contemporanei, è

Prezi

Ancora sulla media aritmetica

Torniamo a parlare della media aritmetica, anche perchè l'ipotesi di Gauss, alla base del lavoro del 1809, arriva dopo una serie di ulteriori passaggi "scientifici". Nel 1756, **Thomas Simpson** dimostrò che, almeno in qualche occasione, **la media aritmetica era più vantaggiosa di una singola osservazione.** Per il caso discreto egli prese in considerazione sia la distribuzione uniforme sia quella triangolare. Dopo aver calcolato l'errore sulla media, egli raccomandò di adottarla come stimatore del 'valore vero' della grandezza cercata. Simpson estendeva quindi considerazioni di tipo probabilistico a un nuovo dominio, introducendo gli errori osservativi casuali i quali assumevano diversi valori a cui erano assegnate le rispettive probabilità. Il suo strumento matematico era la formula generatrice, introdotta da de Moivre intorno al 1730. De Moivre aveva pubblicato la soluzione del problema nel 1712, risolvendo un problema legato al calcolo delle probabilità connesse al raggiungimento di un certo numero di punti lanciando diversi dadi, un po' prima di Montmort, che aveva usato un metodo diverso.
Riguardo allo stesso argomento, facendo senza dubbio riferimento a de Moivre, Simpson riportò gli stessi calcoli nel 1740, sottolineando l'analogia tra i due problemi.


TH
DOCT
AN
APPLIC
O
FLUX
CONTA
(Besides what is comm
A Number of NEW
in the TH
AN
The SOLUTION of a Vari
Interesting, Problems i
the MATHEMA
PAR
By THOMAS SI
LOND
Printed for J. NOURSE,
in the Strand.

ca mai in natura, dovrebbero
*e incognite **p, q, r, s,** ecc per i*
no valori che non superano il
tere nelle misurazioni, anche
ente probabili da ottenere."

Thomas Bayes (1701-1761) era un pastore presbiteriano. Per i suoi contributi matematici divenne fellow della Royal Society nel 1742. La sua memoria postuma fondamentale fu comunicata e presentata da Richard Price (1723-1791), anch'egli pastore presbiteriano e futuro fellow della Royal Society,. Si tratta di "**An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances**", apparso in **Philosophical Transactions** nel 1763.

Il '**problema inverso di Bayes'**, come lo chiamò Price, era quello di determinare la probabilità teorica ignota di un evento a partire dalla sua probabilità statistica.

Schematicamente il problema che Bayes affronta e su cui argomenta e ottiene il proprio risultato è il seguente:

"*una palla cade **α+β=n volte** su un segmento AB di lunghezza unitaria, in modo tale che le sue posizioni su AB siano ugualmente probabili; preso su AB un punto c in modo completamente casuale, la palla cadrà **α volte a sinistra di c (α 'successi')** e **β volte a destra di c (β 'insuccessi')**; sapendo che la probabilità statistica del successo è **α/n**, si richiede di individuare la posizione del punto c. Per ogni intervallo [a;b] appartenente ad AB".*

Questa è la
uniforme a p
rappresenta l'i
successiva.
Attualmente no

dove I è il siml
(*) ossia la fun
come Bayes s
di successi c
ammissibile di

In sostanza, il
possibile sp
superficialmen
possibili posizi
prove portavan

Come nel caso
a leggere la
mancato uso d

Prezi

esentata da
no e futuro
s solving a
losophical

ra quello di
partire dalla

rgomenta e

lunghezza
ugualmente
casuale, la
a destra di
successo è
. Per ogni

$$P(c \in [a;b]) = \frac{\int_a^b C_n^\alpha x^\alpha (1-x)^\beta dx}{\int_0^1 C_n^\alpha x^\alpha (1-x)^\beta dx}. \qquad (*)$$

Questa è la distribuzione a posteriori di c data la sua distribuzione uniforme a priori che rappresenta ciò che ignoriamo. La lettera x rappresenta l'incognita Ac che assume un nuovo valore per ogni prova successiva.
Attualmente noi sappiamo che P=Ib(α+1; β+1)-Ia(α+1; β+1),

dove I è il simbolo della funzione 'Beta' incompleta. Il denominatore della (*) ossia la funzione 'Beta' completa moltiplicata per il fattore C(α,n) era, come Bayes scoprì facilmente, la probabilità P=1/(n+1), ossia il numero α di successi considerati indipendentemente da Ac, per ogni valore ammissibile di α.

In sostanza, il risultato principale di Bayes fu che tramite l'osservazione è possibile specificare la distribuzione (inizialmente nota solo superficialmente) di una variabile casuale. Infatti, anche se tutte le possibili posizioni di c su AB erano ritenute ugualmente probabili, le n prove portavano alla distribuzione (*).

Come nel caso di de Moivre, i matematici continentali trovarono difficoltà a leggere la memoria di Bayes sia per la lingua inglese, sia per il mancato uso del simbolo di integrazione.

a aritmetica

etodo di ottimizzazione - quello che
o come **metodo dei minimi quadrati** -
a dei dati misurati relativi ad una o più
ore sperimentale migliore e quindi più

ribuzione
lettera x
gni prova

ore della
α,n) era,
umero α
i valore

azione è
ta solo
tutte le
bili, le n

difficoltà
ia per il

Il ragionamento di Bayes che dalla distribuzione P (*) porta al noto teorema e all'altrettanto nota formula (che però fu Laplace, nello scritto **Sur la probabilité des causes par les événements** (1774), a formulare, prima solo a parole e, in seguito, a dimostrare rigorosamente) è come sappiamo il seguente:
siano P(Ai) le probabilità degli eventi incompatibili A1, A2, …, An, prima che si presenti l'evento B; supponiamo anche che B avvenga soltanto assieme a uno e solo uno degli Ai, dopo di che questi eventi assumono nuove probabilità. Si ha allora che

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right)=\frac{P\left(\frac{B}{A_i}\right)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P\left(\frac{B}{A_j}\right)P(A_j)}.$$

La 'formula di Bayes' non appare però nella sua memoria. Comunque sia, nel caso discreto, essa descrive anche la transizione da probabilità a priori a probabilità a posteriori.

celebre t
concepis
elementa
crede ch
consiste
somma
probabilit
nel 1810
probabil
compone
medio, a
questa co
Ma quest

Prezi

La dimostrazione di Gauss

Lo schema della prima deduzione della distribuzione normale degli errori di misurazione da parte di Gauss, avviene come detto, all'interno della dimostrazione che lo stesso Gauss fa del metodo dei minimi quadrati.

"*Siano* ***V, V', V''****, ecc* ***n*** *funzioni di* ***m*** *incognite* ***p,q,r,s,*** *ecc e supponiamo che osservazioni dirette abbiano dato, per queste funzioni, i valori*

$V = M \qquad V' = M' \qquad V'' = M'', \ldots$

In generale, il calcolo di questi valori incogniti costituirà un problema determinato, indeterminato o più che determinato a seconda che $n < m$ *,* $n = m$*,* $n > m$*.*

Noi ci occuperemo solo dell'ultimo caso, nel quale, evidentemente, è possibile ottenere una rappresentazione accurata di tutte le osservazioni, anche se queste misurazioni sono affette da qualche errore. Ma poichè questo non si verifica mai in natura, dovrebbero apparire come possibili tutti i valori delle incognite ***p, q, r, s,*** *ecc per i quali* $V - M$*,* $V' - M'$*,* $V'' - M''$ *siano valori che non superano il limite di errore che si possono commettere nelle misurazioni, anche se non tutti questi valori sono ugualmente probabili da ottenere."*

Thomas Bayes (1701-1761) era
contributi matematici divenne fell
sua memoria postuma fondamen

Prezi

Gauss deduce la distribuzione normale

Per non appesantire l'esposizione, qui semplificheremo lo schema deduttivo e argomentativo di Gauss, limitandoci ad una sola grandezza **M** direttamente misurata. Supponiamo dunque - afferma Gauss - che il valore vero di **M** sia **V,** mentre **V1, V2, ..., Vn** siano i risultati ottenuti in **n** misure di **V.** Siano dunque **x1, x2, ..., xn** i veri errori di delle misure effettuate, in modo che si abbia

$$x_i = V - V_i \quad \text{con } i = 1,\dots,n$$

Gauss a questo punto ammette che la probabilità di un errore compreso tra **xi** e **xi + dxi** sia data da **F(xi)dxi,** con **F(x)** che è una funzione da determinare.
La sua prima ipotesi è che la probabilità "a priori" dei diversi errori **xi**, sia data al prodotto

$$F(x_1)\,F(x_2)\dots F(x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

ovvero che gli **xi** siano tra loro indipendenti e indipendenti anche dal valore vero **V.**
V non è però conosciuto e quindi, prima di effettuare le misure, non è possibile che attribuire a **V** valori ipotetici compresi dentro un certo intervallo e aventi tutti la stessa **probabilità a priori.**
Con queste ipotesi Gauss dimostra che se V è uno di questi valori, allora la probabilità di ottenerne il valore attraverso le misure effettuate è proprio la

$$F(x_1)\,F(x_2)\dots F(x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$$

Questa è massima proprio se **V** coincide con il valor medio delle misure effettuate, ovvero se la somma degli scarti **xi** è nulla (una delle assunzioni fatte da Boschovich per trattare il sistema ad n incognite ed m equazioni).
Gauss ne deduce quindi la **F(x)**, cioè la distribuzione normalizzata degli errori. Assumendo che **Vi + xi = F(M),** cioè che le misure effettuate più gli errori siano coerenti (uguali) con una funzione del valore "vero", Gauss dimostra che per determinare il valore vero occorre minimizzare **la somma degli scarti al quadrato.** Il metodo è sostanzialmente lo stesso ottenuto da Legendre, ma Gauss lo deduce attraverso una teoria della misura

La dimostrazione di Gauss

Lo schema della prima deduzione della distribuzione normale degli errori di misurazione da parte di Gauss, avviene come detto, all'interno della dimostrazione che lo stesso Gauss fa del metodo dei minimi quadrati.
*"Siano **V, V', V''**, ecc **n** funzioni di **m** incognite **p,q,r,s,** ecc e supponiamo che osservazioni dirette abbiano dato, per queste funzioni, i valori*

***V = M V' = M' V'' = M'',** ...*

*In generale, il calcolo di questi valori incogniti costituirà un problema determinato, indeterminato o più che determinato a seconda che **n < m , n = m, n > m.***
*Noi ci occuperemo solo dell'ultimo caso, nel quale, evidentemente, è possibile ottenere una rappresentazione accurata di tutte le osservazioni, anche se queste misurazioni sono affette da qualche errore. Ma poichè questo non si verifica mai in natura, dovrebbero apparire come possibili tutti i valori delle incognite **p, q, r, s,** ecc per i quali **V – M, V'- M' , V''- M''** siano valori che non superano il limite [illegible] e che si possono commettere nelle misurazioni, anche se [illegible] tutti gli valori sono ugualmente probabili da ottenere."*

Thomas Bayes (1701-1761) era un pastore presbiteriano. Per i suoi contributi matematici divenne fellow della Royal Society nel 1742. La sua memoria postuma fondamentale fu comunicata e presentata da Richard Price (1723-1791), anch'egli pastore presbiteriano e futuro

La Gaussiana

$$y = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}$$

Il parametro μ cararatterizza il sistema delle misure e dà un'idea della loro precisione, dovendosi il sistema ritenere tanto più preciso quanto più piccolo è μ.
La curva di frequenza rende intuitivo questo fatto. L'area della parte di piano compresa tra la curva e l'asse delle x (asintoto della curva) vale 1; l'ordinata corrispondente all'origine è inversamente proporzionale al parametro μ
Al diagramma discontinuo (curva a scala, ottenuta quando il numero di misure n è abbastanza grande, ma finito) si viene a sostituire, per n che tende all'infinito una curva continua, che si può immaginare ottenuta anche facendo tendere Δx a zero.
Oggi il miglior fondamento teorico della legge di Gauss dovrebbe trovarsi in un celebre teorema di P.-S. Laplace, quando l'errore commesso in una misura si concepisca come la somma d'un grandissimo numero di minuscoli errori (errori elementari), dovuti a cause ignote o mal note. La questione, intorno alla quale si crede che il grande matematico abbia meditato trent'anni (dal 1780 al 1810), consiste nella ricerca della legge di probabilità di una variabile casuale che è

Il principio di massima verosimiglianza

Un altro personaggio che entra nella nostra storia è **Johann Heinrich Lambert (1728-77)**
Lambert fu il primo infatti a formulare nel 1760 **il principio di massima verosimiglianza** per densità di distribuzioni unimodali (la stessa cui appartiene la gaussiana).
Anche lui si occupò di metodi algebrici per calcolare le distanze e correggere gli errori coinvolti nelle osservazioni. Nella sua opera principale su questo argomento "**Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie" (Osservazioni e aggiunte sulla geometria pratica)** del 1765, nel tentativo di determinare, basandosi sul principio di ragione insufficiente, la legge di densità relativa al puntamento di uno strumento geodetico e di stimare numericamente la precisione di tali osservazioni, Lambert anticipa il connubio tra errori osservativi e calcolo delle probabilità.

Sia **φ(x;a)**, dove **a** è un parametro incognito, la densità di distribuzione di **n errori osservativi indipendenti x1,x2, …, xn**; ne deriva che il valore del prodotto

$$\varphi(x1;a)\varphi(x2;a)\ldots\varphi(xn;a) \qquad (**)$$

corrisponde alla probabilità di trovare tali errori. Il massimo della (**) fornirà dunque il **'miglior'** valore di **a.** Se ora si suppone che la densità di distribuzione degli errori per **il principio di massima verosimiglianza** sia **φ(x−a)**, ossia una curva con un singolo picco (valore modale) nel punto **x=a** allora il problema della determinazione del valore vero del parametro si traduce nel calcolo del valore più probabile di **a.**
Il principio di verosimiglianza è alla base della dimostrazione di Gauss.

Prezi

tra che per
i scarti al
, ma Gauss

ione P (*)
ormula
obabilité
formulare,
re
te:
patibili A1,
evento B;
assieme a
esti eventi
e

La Gaussiana

$$y = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}$$

Il parametro μ cararatterizza il sistema delle misure e dà un'idea della loro precisione, dovendosi il sistema ritenere tanto più preciso quanto più piccolo è μ. La curva di frequenza rende intuitivo questo fatto. L'area della parte di piano compresa tra la curva e l'asse delle x (asintoto della curva) vale 1; l'ordinata corrispondente all'origine è inversamente proporzionale al parametro μ

Al diagramma discontinuo (curva a scala, ottenuta quando il numero di misure n è abbastanza grande, ma finito) si viene a sostituire, per n che tende all'infinito una curva continua, che si può immaginare ottenuta anche facendo tendere Δx a zero.

Oggi il miglior fondamento teorico della legge di Gauss dovrebbe trovarsi in un celebre teorema di P.-S. Laplace, quando l'errore commesso in una misura si concepisca come la somma d'un grandissimo numero di minuscoli errori (errori elementari), dovuti a cause ignote o mal note. La questione, intorno alla quale si crede che il grande matematico abbia meditato trent'anni (dal 1780 al 1810), consiste nella ricerca della legge di probabilità di una variabile casuale che è somma d'un grande numero di variabili casuali indipendenti le cui leggi di probabilità sono ignote. Il risultato, al quale egli giunse in due memorie pubblicate nel 1810 e nel 1811, il cui contenuto è riprodotto nella ***Théorie analytique des probabilités*** *(1812), è che, al divergere del numero delle variabili casuali componenti, la variabile risultante ubbidisce, nelle sue oscillazioni intorno al valor medio, alla legge normale. Il procedimento seguito da Laplace per arrivare a questa conclusione è, secondo vari autori, soggetto a gravi obiezioni.*

Ma questa sarebbe un'altra storia

Prezi

La bibliografia essenziale

1. "***Discrepant Measurements and Experimental Knowledge in the Early Modern Era***" in **Archive for History of exact Sciences**, 60, 6/11/2006, di Jed Z.Buchwald
2. "***La funzione della misura nella scienza moderna***" in "***La tensione essenziale e altri saggi***" di T. Kuhn, Einaudi, ristampato nel 2006
3. "***La passeggiata dell'ubriaco. Le leggi scientifiche del caso***" di Mlodinow Leonard, Rizzoli, 2009
4. "***Il caso domato***" di Ian Hacking, Il Saggiatore, 1996
5. "***La filosofia della probabilità***" di Domenico Costantini, Ludovico Geymonat, Feltrinelli, 1982
6. ***Gauss-*** Collana I grandi della scienza, di R. Tazzioli, allegato a Le scienze, ottobre 2002
7. "The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900" di Stephen M. Stigler, Belknap Pr; Reprint edizione (marzo 1990)
8. Varie voci dell'**Enciclopedia Treccani** e alcuni articoli della **Storia della Scienza,** dell'Istituto Treccani

Prezi