

# Scuola di Storia della Fisica

**“Sulla Storia dell’Astronomia: il Novecento.  
Gli strumenti, le scoperte, le teorie.”**

**Asiago 22-26 Febbraio 2016**

**GLOSSARIO: Corpo Nero**

Biagio Buonaura GdSF & Liceo Scientifico Statale «Albertini» Nola (Na)

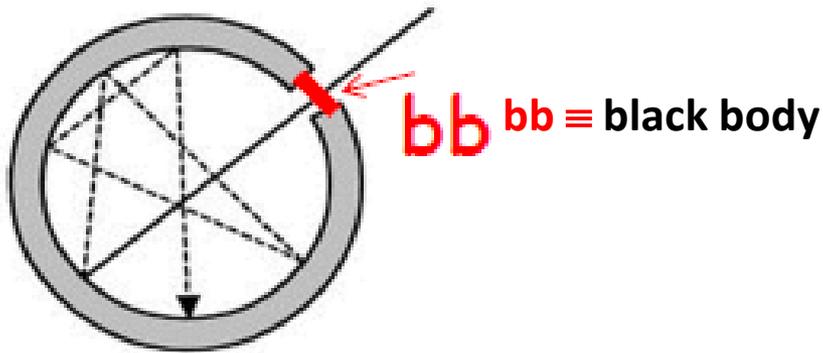
A Bruno CACCIN (1944 – 2004)

Professore di Astronomia

## Radiazione Elettromagnetica: Corpo nero

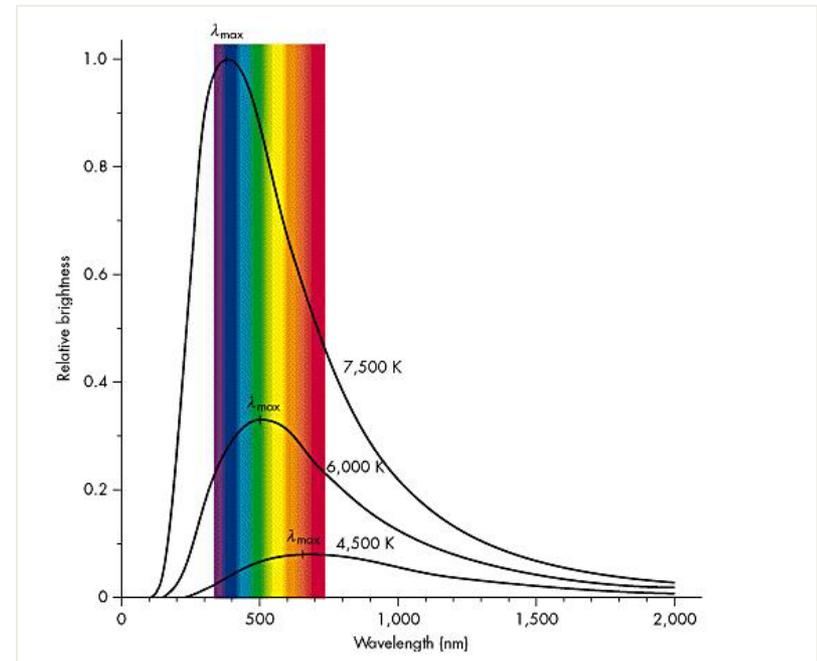
Un **corpo nero** è quel corpo ideale il cui coefficiente d'assorbimento  $a(\nu, T)$  è massimo, cioè vale esattamente uno a tutte le frequenze e a tutte le temperature (perciò è chiamato nero). Il suo coefficiente di emissione  $e(\nu, T)$  ha anch'esso il massimo valore possibile, alla frequenza  $\nu$  e alla temperatura  $T$ , perché è una funzione universale indipendente dalla struttura del materiale che emette.

Kirchhoff dimostrò anche che una radiazione di corpo nero quasi perfetta è quella che esce da un forellino di un corpo in cui sia stata praticata una cavità. Nella cavità interna di un corpo tenuto a temperatura costante si stabilisce una radiazione e.m. la cui densità gode di proprietà molto semplici: isotropia, omogeneità, indipendenza dalla forma della cavità, indipendenza dalla sostanza che costituisce le pareti.



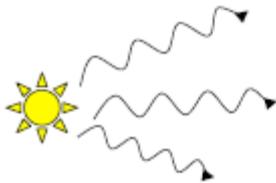
Corpo con Cavità

### SPETTRO CARATTERISTICO



## Parametri utili per la descrizione del campo di radiazione

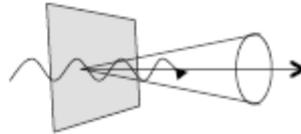
Luminosity



$$L \text{ W}$$

Total power emitted  
in all directions

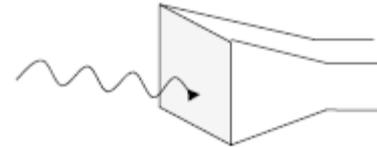
Intensity



$$I \text{ W m}^{-2} \text{ sterad}^{-1}$$
$$I_{\nu} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$$

Power per unit area in a  
particular direction  
per unit frequency  
(specific intensity)

Flux



$$F \text{ W m}^{-2}$$
$$F_{\nu} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

Power per unit area  
per unit frequency  
(specific flux)

For a source emitting isotropically

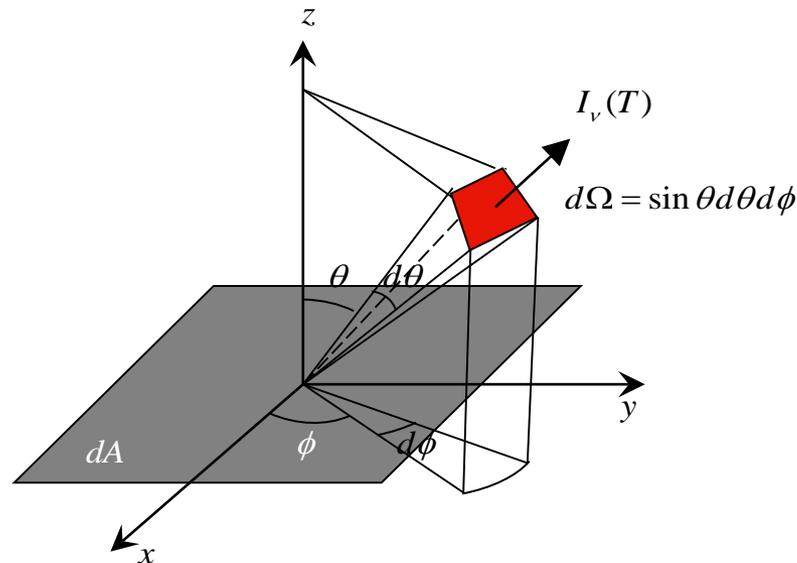
$$F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

L' **intensità specifica di radiazione**  $I_\nu$  (spesso chiamata «brillanza»  $B_\nu$ ) è definita come la quantità di energia  $dE_\nu$  trasportata dalla radiazione di frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu+d\nu$  nell'intervallo di tempo  $dt$  attraverso la superficie  $dA$ , nella direzione  $\vartheta$ , nell'angolo solido  $d\Omega$ :

$$I_\nu \equiv \frac{dE_\nu d\nu}{dt dA \cos \theta d\Omega}$$

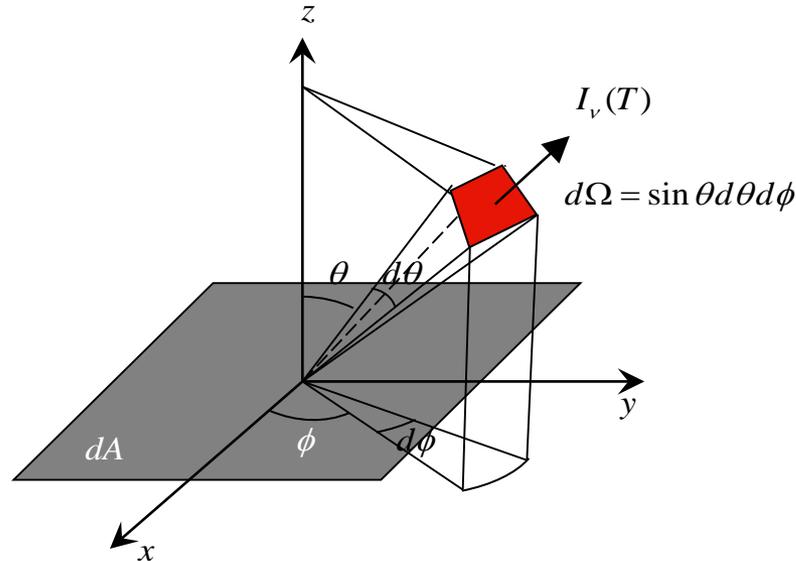
$$I_\nu(\nu, \Omega) \left[ \text{J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ ster}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \right]$$

Le unità di misura di  $I_\nu$  nel SI di misura sono:



In generale,  $I_\nu$  dipende dalla direzione . L' **intensità media** è definita come la media dell'intensità in tutte le direzioni (cioè su tutti gli angoli solidi  $d\Omega$ ).

$$J_\nu \equiv \langle I_\nu \rangle = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\nu \sin \theta d\theta d\phi$$

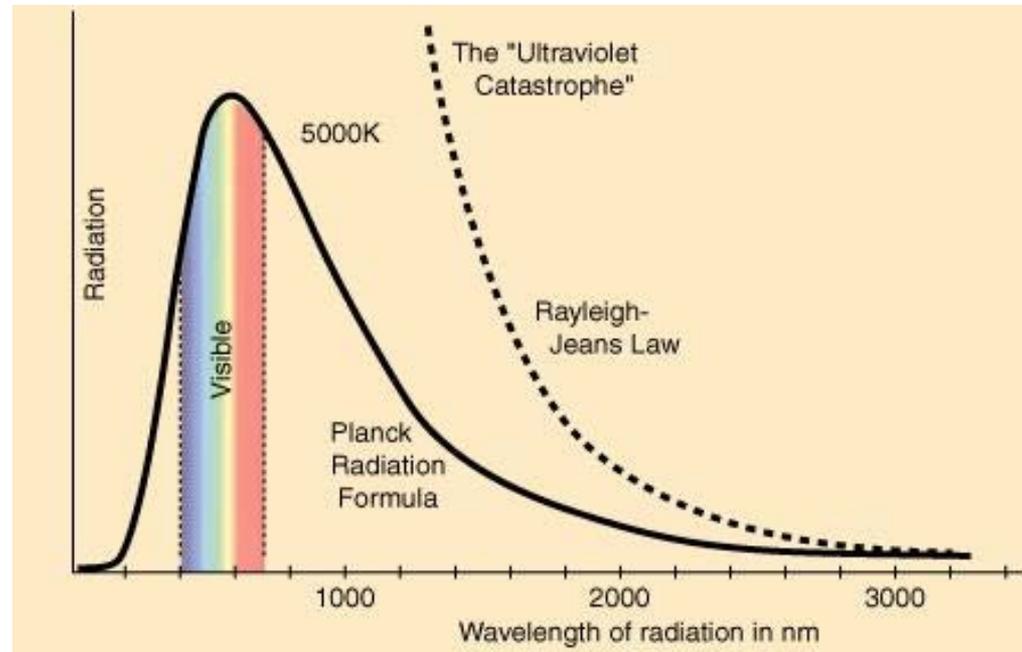


Se  $I_\nu$  è isotropa (cioè indipendente dalla direzione, quindi da  $\phi$  e  $\theta$ ) come nel caso del corpo nero, allora  $J_\nu = I_\nu = B_\nu$  .

La funzione Intensità o Brillanza (isotropa) per il corpo nero fu trovata da Max Planck (14-Dic.1900):

$$I_{\nu}(T) = B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}$$

con  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/k.



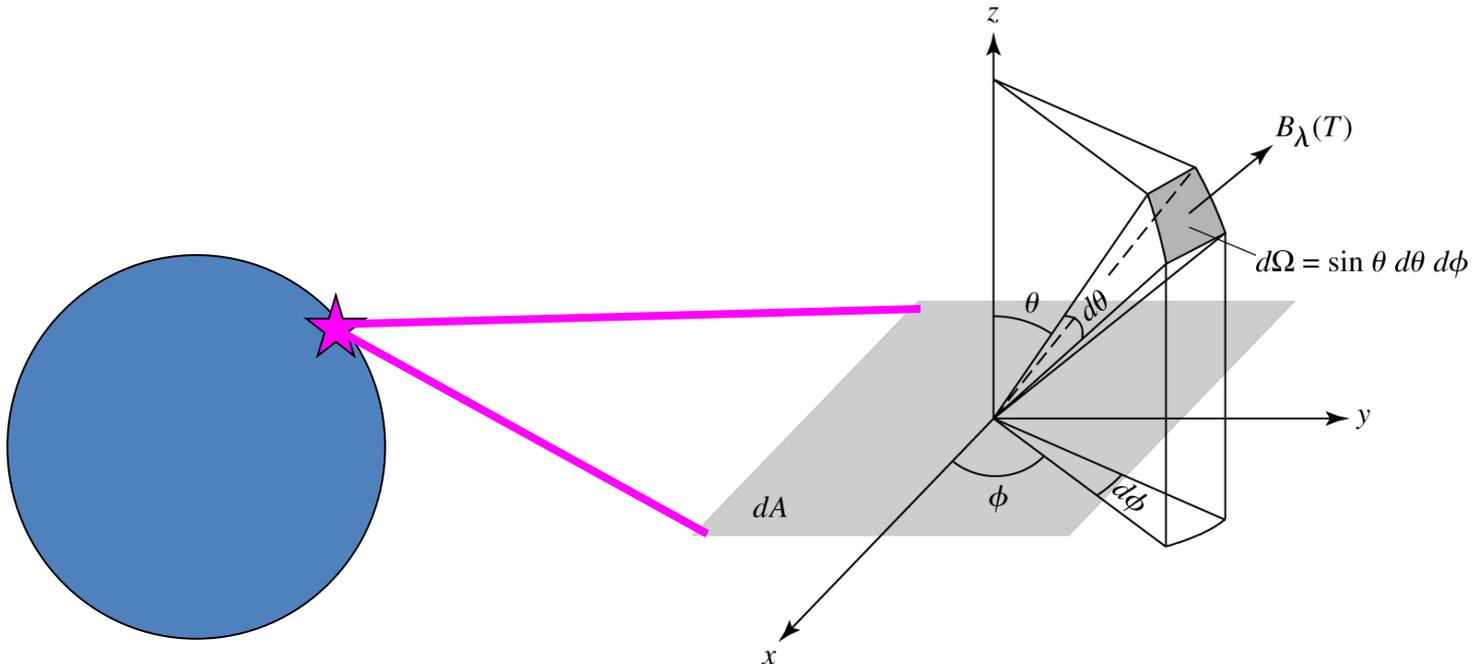
La potenza emessa da un **corpo nero sferico** è data da:

$$\frac{dE_\nu d\nu}{dt} = I_\nu dA \cos \theta d\Omega d\nu = L_\nu d\nu$$

$$L = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_A \int_{\nu=0}^{\infty} (B_\nu d\nu) (dA \cos \theta) \sin \theta d\theta d\phi = A\sigma T^4$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W / (m}^2\text{K}^4 \text{ )}$$

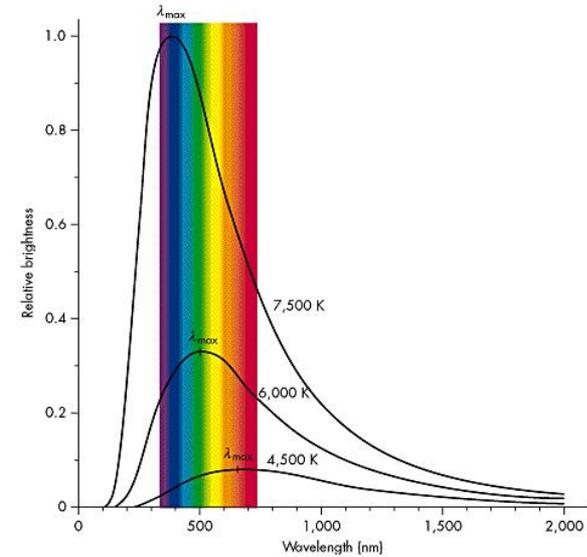
Nota come **legge di Stefan - Boltzmann**



## Proprietà della radiazione di corpo nero

1. La lunghezza d'onda  $\lambda$  alla quale avviene il massimo dell'emissione di corpo nero decrece all'aumentare della temperatura ( **legge di Wien** )

$$\lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm K}$$



2. L'energia totale emessa (Luminosità) da un corpo nero di area A aumenta con la quarta potenza della Temperatura (**equazione di Stefan-Boltzmann**)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

Questa definisce la **Temperatura Efficace** di una stella di raggio  $R$  e luminosità  $L$

## Comportamento asintotico

- Nel dominio „**rosso**“ di Rayleigh-Jeans

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \quad \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$$
$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2k\nu^2 T}{c^2}$$

- Nel dominio „**blu**“ di Wien

$$\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \quad \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \approx \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$
$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

## Legge di Wien

$$\frac{d}{d\nu} B_\nu(\nu, T) = \frac{d}{d\nu} \left[ \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} \right] \quad x := h\nu/kT$$
$$= B_\nu \left[ \frac{3}{\nu} + \frac{-1}{e^x - 1} \frac{x}{\nu} e^x \right]$$

$$\frac{d}{d\nu} B_\nu = 0 \rightarrow 3 - x_{\max} e^{x_{\max}} / (e^{x_{\max}} - 1) = 0$$
$$\rightarrow x_{\max} - 3(1 - e^{-x_{\max}}) = 0$$

**soluzione numerica:**  $x_{\max} = 2.821 = \frac{h\nu_{\max}}{kT}$        $\lambda_{\max} T = 0.5100 \text{ cm K}$

## Integrazione sulle frequenze : Legge di Stefan -Boltzmann

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} d\nu \\ &= \frac{2k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2}{15} \frac{\pi^4 k^4}{c^2 h^3} T^4 \\ &= \pi^4 / 15 \\ &= \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad \text{with } \sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W / (m}^2 \text{K}^4 \text{ )} \end{aligned}$$

**Densità di energia** di un corpo nero:

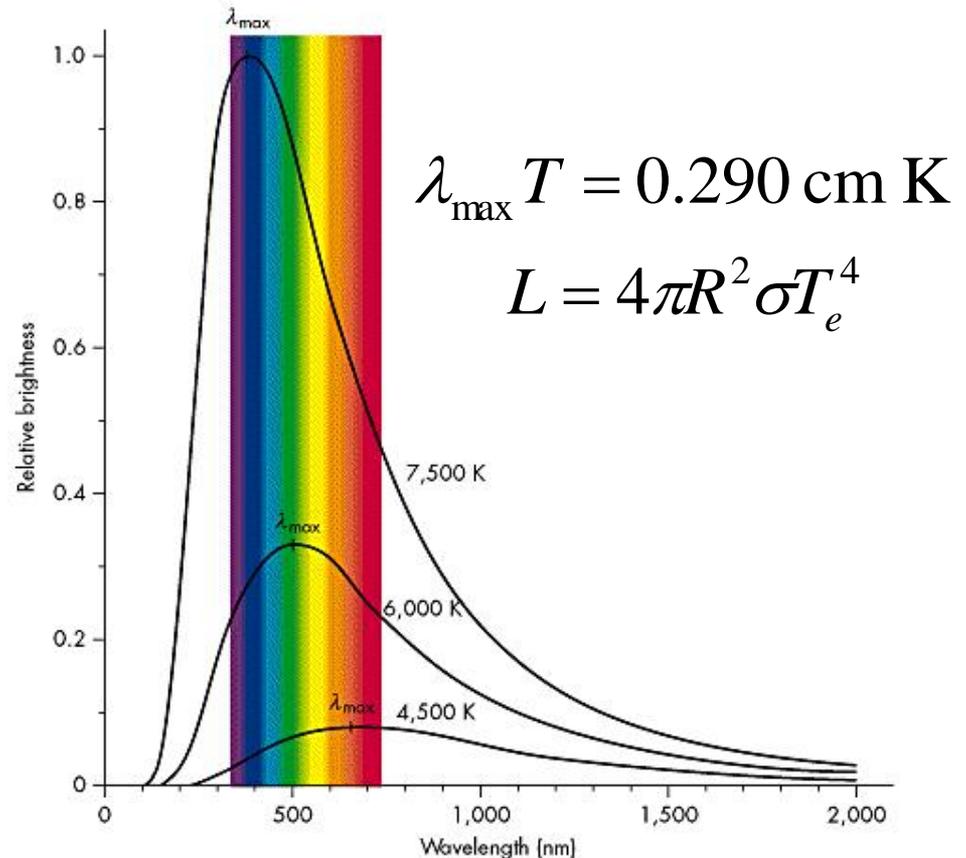
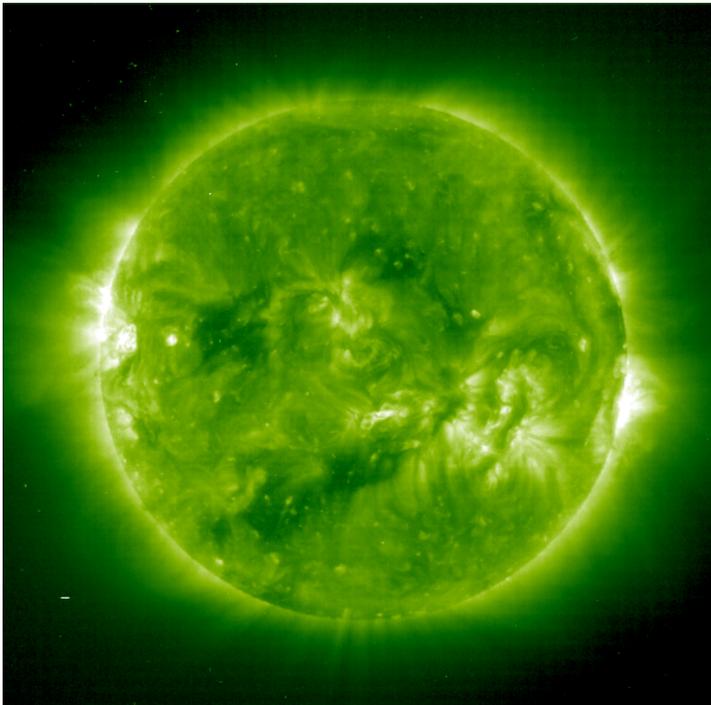
$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} J_{\nu}(\nu) d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

## Esempio

• Il Sole ha una luminosità  $L=3.826 \times 10^{26}$  W e un raggio  $R=6.96 \times 10^8$  m. a) Qual è la sua temperatura efficace? b) A quale lunghezza d'onda è il massimo dell'emissione?

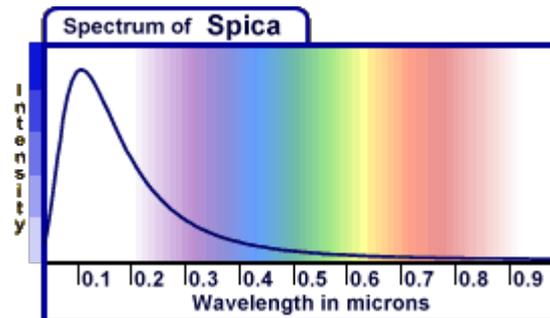
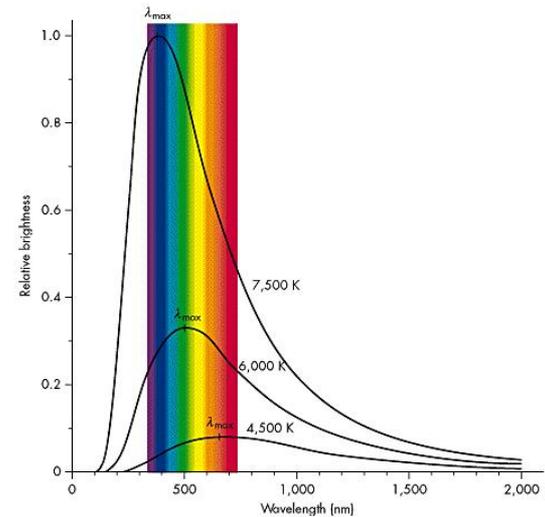
a)  $T_{e\odot} = 5770$  K

b)  $\lambda_{\max} = 503$  nm (verde)



## Esempio

- Spica è una delle più calde stelle nel cielo, con una temperatura efficace di 25400 K. Il massimo del suo spettro cade perciò a 114 nm, nel lontano ultravioletto, ben al disotto del limite della visione umana.
- Possiamo ancora vedere, però, perché emette luce anche lunghezze d'onda più grandi.



$$\lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm K}$$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

## Riferimenti

M. Capaccioli **Lezioni di Astrofisica** Università Federico II -Napoli

V. Castellani **Astrofisica Stellare** Zanichelli - Bologna

A. Bersanelli **Lezioni di Astronomia** Università di Milano

A. Marconi **Lezioni di Astrofisica** Università di Firenze

G. Giuliani e I. Bonizzoni **Lineamenti di Elettromagnetismo** – La Goliardica Pavese

F. Selleri **Lezioni di Istituzioni di fisica teorica** Università di Bari