Scuola di Storia della Fisica

“Sulla Storia dell’Astronomia: il Novecento. Gli strumenti, le scoperte, le teorie.”

Asiago 22-26 Febbraio 2016

GLOSSARIO : Radiazione di ciclotrone e sincrotrone

Biagio Buonaura GdSF & Liceo Scientifico Statale «Albertini» Nola (Na)

A Bruno CACCIN (1944 – 2004)

Professore di Astronomia

Radiazione Elettromagnetica: Radiazione di sincrotrone

Il campo elettrico di una carica che si muove di moto arbitrario e' formato da due termini

$$\boxed{\vec{E} = \underbrace{\frac{q}{R^2} \quad f(\vec{n},\vec{v})}_{\text{velocita'}} + \underbrace{\frac{q}{R} \quad f_1(\vec{n},\vec{a})}_{\text{accelerazione}}}$$

Il primo termine, <u>dipendente dalla velocità</u>, diminuisce rapidamente con la distanza R. Il termine <u>dipendente dall' accelerazione</u> genera la radiazione e.m. che noi osserviamo – stesso meccanismo che si verifica nelle antenne radio dove le cariche (gli elettroni del metallo) oscillano periodicamente.

La **potenza totale irradiata** su tutto l’angolo solido risulta essere

$$\boxed{P_{rel} = \frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}\gamma^4}$$

dove

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}}$$

proporzionale al quadrato dell’ accelerazione.

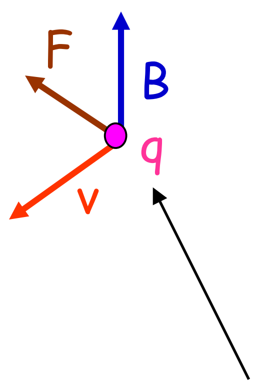
Nel caso non relativistico v<<c $\Rightarrow$ $\gamma \approx 1$ si ha:

$$\boxed{P_{rel} = \frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}}$$

Una particella carica in moto in un campo magnetico **B** irraggia perché sottoposta ad accelerazione (centripeta). Se v<<c si parla di **radiazione di ciclotrone**; se v ≈ c (velocità relativistiche) si parla di **radiazione di sincrotrone**. In Astrofisica è una sorgente di radiazione molto importante.
L'equazione del moto risulta:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\gamma m\mathbf{v}\right)=\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}}$$

Essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità:



Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

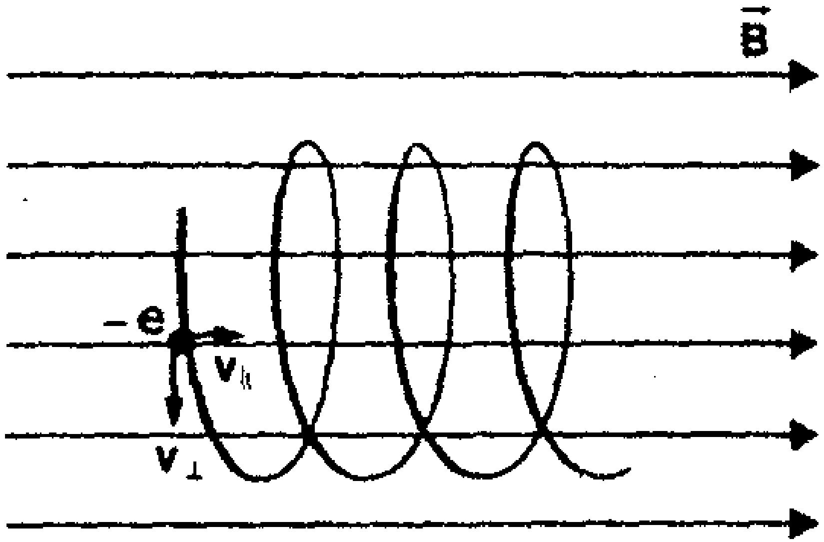
La forza non compie lavoro sulla particella e quindi il modulo della sua velocità rimane costante pertanto l'equazione del moto può scriversi:

$$\boxed{\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

Se consideriamo le direzioni || e $\perp$ al campo magnetico **B** si può scrivere:

$$\frac{d\mathrm{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \qquad \left|\mathrm{v}_{\parallel}\right| = \mathrm{constant} \qquad\qquad \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma m c}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \qquad \left|\mathrm{v}_{\perp}\right| = \mathrm{constant}$$

Il moto è rettilineo uniforme e circolare uniforme attorno alle linee del campo **B. Il moto è elicoidale** attorno alle linee di **B**.



L’equazione:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{\gamma mc}\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B} \qquad |\mathrm{v}_\perp| = \mathrm{constant}}$$

Permette di calcolare l’<u>accelerazione centripeta </u>della particella:

$$\boxed{a_c = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \frac{q}{\gamma mc}\mathrm{v}B\sin\alpha}$$

r $\equiv$ raggio di girazione (raggio dell’orbita circolare attorno alle linee di campo **B**)

α $\equiv$ angolo di pitch (angolo di beccheggio, ovvero l’angolo che la velocità forma con le linee di campo **B**)

T $\equiv$ periodo di girazione (periodo dell’orbita circolare attorno alle linee di campo **B**)

$$\boxed{\begin{aligned} & a_c = \frac{q\beta B}{\gamma m} \; ; \; \beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}} \\ & r = \frac{\mathrm{v}^2}{a_c} = \frac{\gamma m c^2 \beta}{qB} \\ & T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi\gamma m c}{qB} \end{aligned}}$$

Pertanto la potenza emessa in radiazione elettromagnetica risulta:

$$\boxed{P_{rel} = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\gamma^4 a^2 = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\gamma^4 \left(\frac{q\beta_\perp B}{\gamma m}\right)^2 = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_\perp^2 \gamma^2 B^2 \; ; \quad r_0 = q^2 / mc^2 \; ; \; \beta_\perp = \frac{\mathrm{v}_\perp}{c}}$$

Lo spazio è pieno di campi magnetici , alcuni molto deboli; tuttavia, vi è un abbondanza
di elettroni relativistici in ambienti a bassa densità.

location	Field strength (gauss)
interstellar medium	10^{-6}
stellar atmosphere	1
Supermassive Black Hole	10^{4}
White Dwarf	10^{8}
Neutron star	10^{12}
this room	0.3
Crab Nebula	10^{-3}

1 gauss (G) = 10^{-4} tesla (T)
1 tesla (T) = 1 Wb m^{-2}

L'elettrone e = $1,6 \times 10^{-19}$ C = 4.8×10^{-10} ues , $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ Kg= $9,1 \times 10^{-28}$ g, nel mezzo interstellare ha $\gamma \approx 1$ B $\approx 3 \times 10^{-6}$ Gauss = 3×10^{-10} T c = 3×10^{8} m/s= 3×10^{10} cm/s
Pertanto il suo periodo di girazione : $T = 2\pi\gamma/B \times 5,68 \times 10^{-8} \approx 1,19 \times 10^{-1}$ s

Radiazione di ciclotrone: v << c $\Rightarrow$ $\gamma \approx 1$

$$a_c = \frac{q\beta B}{m} \; ; \; \beta = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}$$

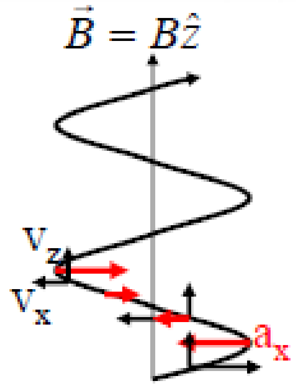
$$r = \frac{\mathrm{v}^2}{a_c} = \frac{mc^2\beta}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} = \frac{2\pi mc}{qB}$$

$$P_{non-rel} = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta^2 \sin^2\alpha B^2 \; ; \; r_0 = q^2/mc^2 \; ; \; \beta = \frac{\mathrm{v}}{c}$$

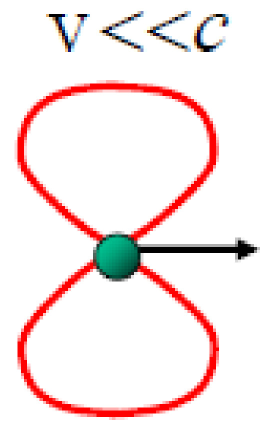
La radiazione emessa ha quindi **un' unica frequenza**, indipendente dall' energia della carica .

Inoltre è **polarizzata** in direzione ortogonale a quella del campo magnetico, perché la carica compie un moto accelerato (armonico) solo in quella direzione.



Radiazione di ciclotrone: v << c $\Rightarrow \gamma \approx 1$

La radiazione emessa ha **due lobi di emissione** con potenza proporzionale a $\sin^2\alpha$, dove il massimo si ha per $\alpha = \pi/2$.



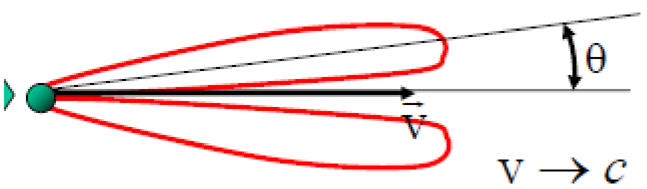
Radiazione di sincrotrone: $v \approx c \Rightarrow \gamma >> 1$

Per velocità relativistiche i due lobi di emissione di energia EM di una carica accelerata si deformano moltissimo nella direzione della velocità'.
In pratica l' irraggiamento avviene in uno **stretto cono** la cui semiapertura θ è tanto più' stretta quanto più' alta è la velocità. Infatti dobbiamo ricordare il fenomeno dell'**aberrazione relativistica**, cioè il cambiamento di direzione da un sistema di riferimento solidale con la carica elettrica (in quiete) ed un sistema che vede in moto la carica elettrica con velocità v. Pertanto:

$$\boxed{\sin\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\alpha}{1+\beta\cos\alpha}}$$

Se $\alpha \approx \pi/2 \Rightarrow \cos\alpha = 0$; $\sin\alpha \approx 1$, per cui:

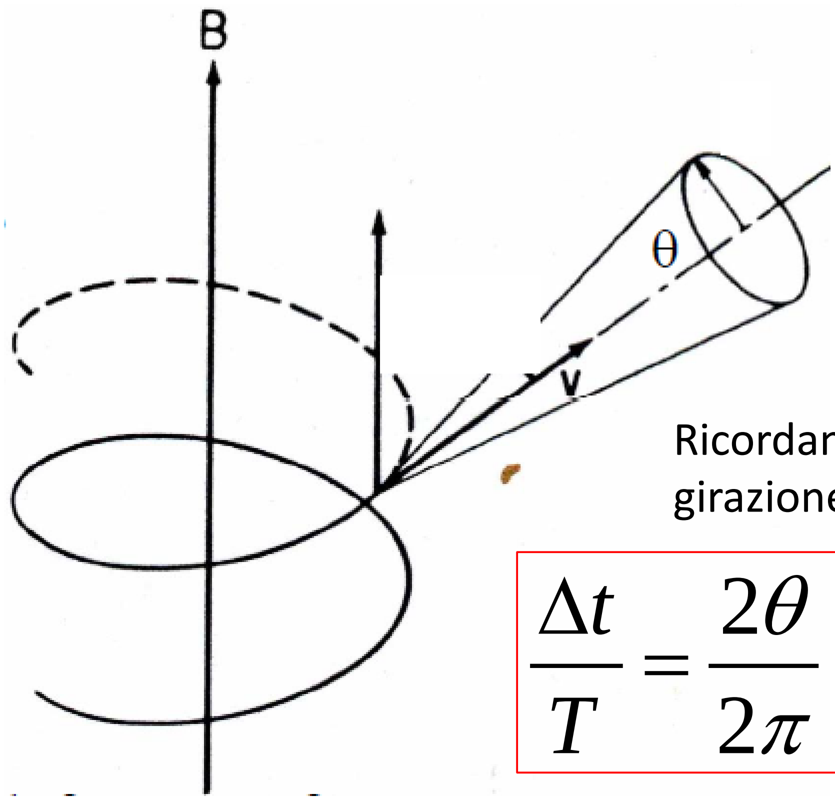
$$\boxed{\sin\theta = \frac{1}{\gamma}}$$



Poiché $\gamma >> 1$, essendo $\sin\theta = 1/\gamma \Rightarrow \theta \approx 1/\gamma$

Radiazione di sincrotrone: $v \approx c \Rightarrow \gamma >> 1$

Per questo motivo, un osservatore riceverà radiazione di sincrotrone solo per il breve intervallo di tempo Δt in cui la sua posizione viene spazzata dal cono di radiazione emessa dalla carica.

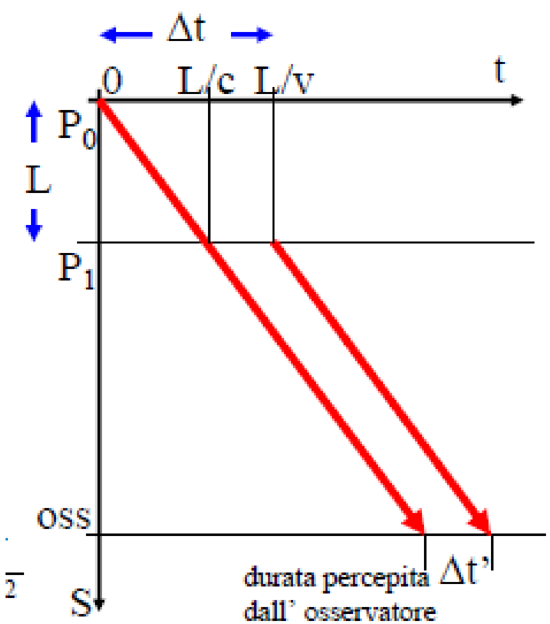


Ricordando la diretta proporzionalità tra Δt e periodo di girazione T, potremo scrivere:

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = \frac{2\theta}{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\theta}{\pi} T = \frac{1}{\pi\gamma}\frac{2\pi\gamma mc}{qB} = \frac{2mc}{qB}}$$

Radiazione di sincrotrone: $v \approx c \Rightarrow \gamma >> 1$

In realtà Δt è **più corto** di quello stimato, infatti la carica si sta muovendo verso l'osservatore e quindi la radiazione emessa alla fine del Δt deve percorrere *una distanza inferiore* a quella percorsa dalla radiazione emessa all' inizio del Δt.



Si supponga che la radiazione iniziale sia emessa al tempo $t = 0$ in P_0 . Durante l'intervallo di tempo Δt, la particella carica avanza di un tratto $L = v\Delta t$. In questa posizione P_1 emetterà la radiazione finale verso l'osservatore. Ora la radiazione iniziale emessa in P_0 è arrivata in P_1 all'istante L/c, mentre la radiazione finale è emessa in P_1 all'istante L/v. Pertanto il ritardo $\Delta t'$ tra la percezione della radiazione iniziale e quella finale è dato da:

$$\boxed{\Delta t' = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \Delta t\left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

Ricordando che $1-v/c \approx 1/(2\gamma^2)$, troviamo che:

$$\boxed{\Delta t' \cong \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{mc}{\gamma^2 qB}}$$

Radiazione di sincrotrone: v ≈ c ⇒ γ>>1

Quindi l'osservatore percepisce una serie d'impulsi di radiazione ciascuno di durata:

$$\boxed{\Delta t' \cong \frac{\Delta t}{2\gamma^2} = \frac{mc}{\gamma^2 qB}}$$

Lo **spettro di potenza** di questa serie d'impulsi è pressochè **piatto** , con una frequenza massima:

$$\boxed{\nu_{\max} = \frac{1}{\Delta t'} = \frac{\gamma^2 qB}{mc} = \gamma^3 \nu_c \quad ; \quad \nu_c = \frac{qB}{\gamma mc} \ \text{(frequenza di sincrotrone)}}$$

o anche:

$$\boxed{\nu_{\max} = \frac{qB}{mc}\left[\frac{E}{mc^2}\right]^2}$$

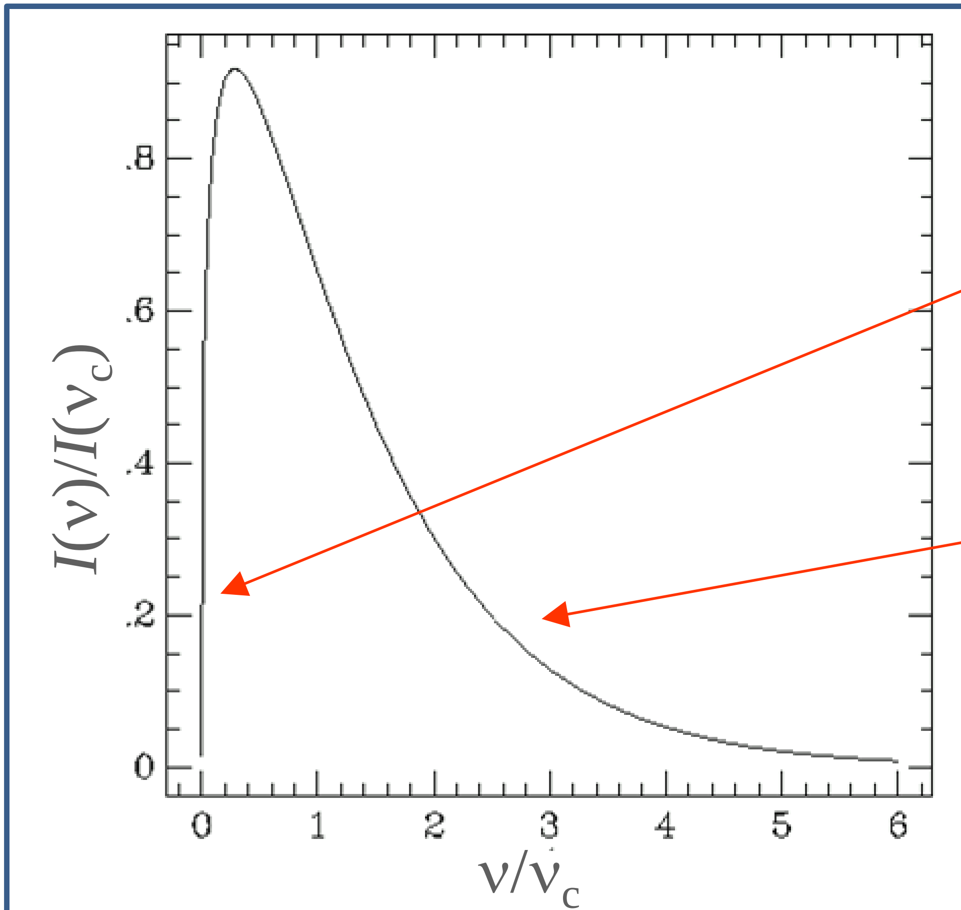
dove E è l'energia della particella.

Radiazione di sincrotrone: v ≈ c ⇒ γ>>1

Il calcolo rigoroso permette di ricavare lo **spettro emesso da elettroni monoenergetici**, che risulta essere uno spettro di righe a tutti i multipli di ω_c.

Lo spettro si estende a frequenze talmente più alte di ω_c che a tutti gli effetti può' essere considerato uno spettro continuo dato dall' inviluppo di tutte le righe.

Spettro radiazione di sincrotrone.



$$I(\nu) \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{per} \quad \nu \ll \nu_c$$

$$I(\nu) \propto \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)} \quad \text{per} \quad \nu \gg \nu_c$$

Esempio: Nei filamenti della Nebulosa del Granchio (Crab Nebula) il campo magnetico B =10^{-4} Gauss.

Un elettone non relativistico ha una frequenza di ciclotrone pari a:

$$\boxed{\nu_c = \frac{eB}{m_e c} = \frac{4.8\times10^{-10}\times10^{-4}}{3\times10^{10}\times9.11\times10^{-27}}\,Hz \cong 176\,Hz}$$

Un elettrone relativistico, con energia E= 1Gev = 10^9 invece emette radiazione di sincrotrone con frequenza massima di:

$$\nu_{\max} = \nu_c\left[\frac{E}{m_e c^2}\right]^2 \cong 176\left[\frac{10^9}{5\times10^5}\right]^2 Hz \cong 7.04\times10^8\,Hz$$

microonde

Un elettrone relativistico, con energia E= 1Tev = 10^{12} eV invece emette radiazione di sincrotrone con frequenza massima di:

$$\nu_{\max} = \nu_c\left[\frac{E}{m_e c^2}\right]^2 \cong 176\left[\frac{10^{12}}{5\times10^5}\right]^2 Hz \cong 7.04\times10^{14}\,Hz$$

raggi X

Elettroni che emettono radiazione di sincrotrone si «**raffreddano**» perdono, cioè, energia. Il tempo caratteristico delle perdita di energia si ottiene:

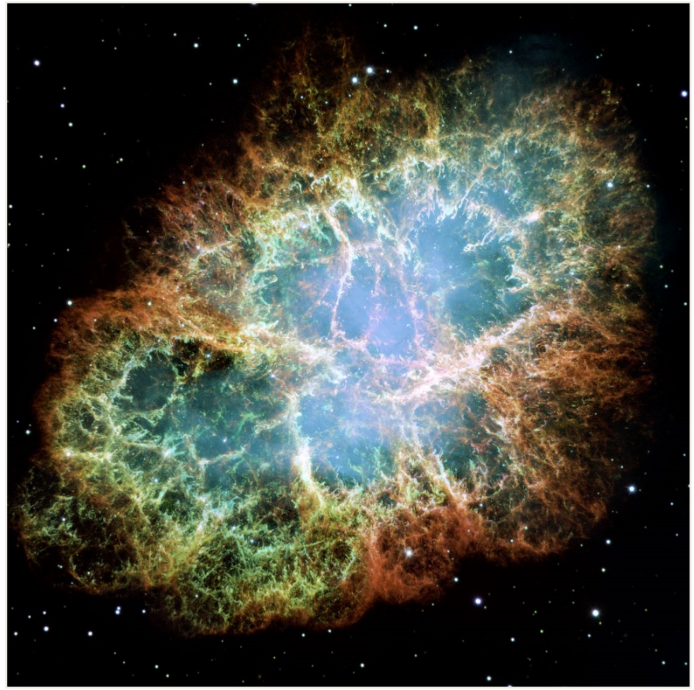
$$\boxed{\tau \cong \frac{E}{P_{rel-isotropa}} = \frac{\gamma m_e c^2}{\frac{4}{3}\sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B}}$$

con $U_B = B^2/(8\pi) \equiv$ densità di energia del campo magnetico. Il coefficiente 4/3 si ottiene considerando elettroni relativistici con vettori velocità distribuiti in modo isotropo per cui:

$$\boxed{\left\langle \beta_\perp^2 \right\rangle = \frac{\beta^2}{4\pi}\int \sin^2\alpha \, d\Omega = \frac{2\beta^2}{3}}$$

Con $\beta_\perp = \beta\sin\alpha$ e $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$

Lo spettro di emissione della Crab Nebula è dominato dall'**emissione radiazione di sincrotrone**.



La Crab Nebula ha una luminosità totale L $5\text{x}10^{38}$ erg = $5\text{x}10^{31}$J. Se consideriamo gli elettroni delle Crab Nebula con una frequenza di sincrotrone ν_{max} = 4,8 x 10^{18} Hz in un campo magnetico B = 10^{-4} Gauss = 10^{-8} T.
Essi presentano un γ dato da:

$$\boxed{\gamma^2 = \nu_{\max}\frac{mc}{qB} = 4.8\times10^{18}\times\frac{9.1\times10^{-28}\times3\times10^{10}}{4.8\times10^{-10}\times10^{-4}} = 27.3\times10^{14}} \Rightarrow \boxed{\gamma \cong 5\times10^{7}}$$

L'energia degli elettroni è: $E=\gamma m_e c^2 = 5x10^7 \times 9,1x10^{-28}x9x10^{20} = 40,5$ erg.

La potenza emessa dall'elettrone è: $P_{rel\text{-}isotropa}$ è data da:

$$\boxed{P_{rel-isotropa} = \frac{4}{3}\sigma_T c\beta^2\gamma^2 U_B \cong 3\times10^{-8}\, erg/s}$$

Ne segue che il tempo di raffreddamento è:

$$\boxed{\tau \cong \frac{E}{P_{rel-isotropa}} = \frac{40,5erg}{3\times10^{-8}\, erg/s} = 1.35\times10^9\, s \cong 43 anni}$$

Tempo che è **molto minore** dell'età della Nebulosa del Granchio (Luglio-Agosto 1054). Essa è il resto di un'esplosione di supernova a 6300 anni luce dalla Terra che contiene una giovane stella di neutroni rapidamente ruotante di ≈ 25km di diametro e periodo T =$33x10^{-3}$ s (**PULSAR**) che fornisce elettroni ad alta energia alla nebulosa.

Riferimenti

M. Capaccioli **Lezioni di Astrofisica** Università Federico II -Napoli

V. Castellani **Astrofisica Stellare** Zanichelli - Bologna

A. Bersanelli **Lezioni di Astronomia** Università di Milano

A. Marconi **Lezioni di Astrofisica** Università di Firenze

G. Giuliani e I. Bonizzoni **Lineamenti di Elettromagnetismo** – La Goliardica Pavese

F. Selleri **Lezioni di Istituzioni di fisica teorica** Università di Bari