Scuola di Storia della Fisica

Chadwick e dintorni, dal neutrone al neutrino

POLICORO

19 FEBBRAIO - 23 FEBBRAIO 2018

Biagio Buonaura – Liceo Scientifico «ALBERTINI» & GSdF – AIF –Nola (NA)

Appendice II

In un campo centrale sono *conservati* il *momento angolare* e l'*energia meccanica*. Consideriamo le posizioni asintotiche della particella α prima dell'urto (-∞) e dopo l'urto (+∞) con il nucleo atomico (Fig. 1):

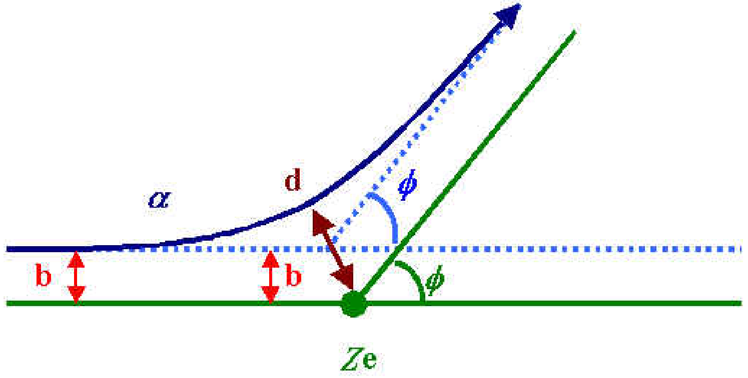

Fig.1

$$\begin{cases} M_\alpha \mathrm{v}_{\alpha(-\infty)} d \sin\left(\pi - \phi_{-\infty}\right) = M_\alpha \mathrm{v}_{\alpha(+\infty)} d \sin\left(\pi - \phi_{+\infty}\right) \\ \dfrac{1}{2} M_\alpha \mathrm{v}^2{}_{\alpha(-\infty)} + U_{-\infty} = \dfrac{1}{2} M_\alpha \mathrm{v}^2{}_{\alpha(+\infty)} + U_{+\infty} \end{cases}$$

essendo

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{r}$$

si ottiene:

$$\lim_{r \to \pm\infty} \frac{2Ze^2}{r} = 0$$

per cui risulta:

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{v}_{\alpha(-\infty)} = \mathrm{v}_{\alpha(+\infty)} \\ b = d\sin\left(\pi - \phi_{-\infty}\right) = d\sin\left(\pi - \phi_{+\infty}\right) \end{cases}}$$

con *b* la distanza tra la direzione della particella α incidente ed una retta parallela passante per il nucleo fermo; tale distanza viene chiamata *parametro d'urto* (Fig.1).

D'altra parte la lagrangiana $\mathcal{L}$ per una particella in un campo centrale si scrive:

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\gamma}{r}}$$

γ= $2Ze^2$ per la particella α nel campo del nucleo. Le equazioni di Lagrange porgono:

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{\gamma}{r^2} \\ 0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) \end{aligned}}$$

La seconda delle equazioni implica che al variare nel tempo si conserva il momento angolare L.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)=0 \Rightarrow \vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=mr^2\dot{\vartheta}\hat{z}}$$

Il momento angolare si conserva perché l'energia potenziale U, della particella, dipende solo da r e non da θ.

Per risolvere, invece, la prima equazione di Lagrange bisogna eliminare $\dot{\vartheta}$ ed in più farla diventare lineare in r (infatti contiene r^{-2}). Questo si ottiene con il cambiamento di variabile: $u = r^{-1}$.

$$\boxed{\dot{r}=\frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d(u^{-1})}{d\vartheta}\dot{\vartheta}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\vartheta}\frac{L}{mr^2}=-\frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}}$$

$$\boxed{\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\dot{r}}{d\vartheta}\frac{L}{mr^2}=\frac{L}{m}u^2\frac{d}{d\vartheta}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}\right)=-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}}$$

La prima equazione di Lagrange si riscriverà allora:

$$\boxed{m\left[-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}-\frac{L}{m}\frac{du}{d\vartheta}\right]-\gamma u^2=0}$$

da cui si ottiene un’equazione differenziale, questa volta lineare, in u che risulta:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\gamma m}{L^2}}$$

La cui soluzione generale è data:

$$\boxed{u=u_{Omog}+u_{Partic}=-\frac{\gamma m}{L^2}\left[1+\varepsilon\cos\left(\theta-\theta_0\right)\right]}$$

L'equazione generale del moto per la particella α si scriverà:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{\gamma M_\alpha}{L^2}}$$

con u =1/r (distanza $^{-1}$ della particella α dal nucleo) ; γ = 2Ze^2 ; L= M_αvb con b=$r$sinθ . Sostituendo troviamo che:

$$\boxed{\frac{\gamma M_\alpha}{L^2}=\frac{2Ze^2M_\alpha}{M_\alpha^2\mathrm{v}^2b^2}=\frac{2Ze^2}{M_\alpha\mathrm{v}^2b^2}=\frac{D}{b^2}}$$

con:

$$\boxed{D=\frac{2Ze^2}{M_\alpha\mathrm{v}^2}}$$

e quindi l'equazione del moto assume la forma:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{D}{b^2}}$$

Il suo integrale generale è:

$$\boxed{u = A\cos\vartheta + B\sin\vartheta - \frac{D}{b^2}}$$

dove A e B sono costanti che vengono determinate dalle seguenti condizioni iniziali:

I. $\theta \to 0$ deve essere compatibile con $u \to 0$ (cioè $r \to \infty$) pertanto:

$$\boxed{A - \frac{D}{b^2} = 0}$$

II. $\theta \to 0$ deve essere compatibile con *dr/dt* $\to$ -v (poiché in fase di avvicinamento al nucleo *r* decresce), quindi:

$$\boxed{\dot{r} = \frac{dr}{d\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{d(1/u)}{d\vartheta}\frac{L}{M_\alpha r^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\vartheta}\frac{L}{M_\alpha}u^2 = -\frac{L}{M_\alpha}\frac{du}{d\vartheta}}$$

sostituendo al posto di L : L= $M_\alpha v b$ otteniamo:

$$\boxed{\dot{r} = -\mathrm{v}b(-A\sin\vartheta + B\cos\vartheta)}$$

Per θ =0 deve aversi allora:

$$\boxed{-\mathrm{v} = -\mathrm{v}bB \Rightarrow B = \frac{1}{b}}$$

Quindi:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{D}{b^2}\left(\cos\vartheta - 1\right) + \frac{1}{b}\sin\vartheta}$$

L'angolo θ', con cui emerge la particella α emerge dopo l'urto, si può trovare come segue: per $r \to \infty$:

$$\boxed{0 = \frac{D}{b^2}\left(\cos\vartheta' - 1\right) + \frac{1}{b}\sin\vartheta'}$$

Questa equazione ha 2 soluzioni:

$\theta' = 0$ prima dell'urto

e la seconda dopo l'urto data da:

$$\boxed{\frac{b}{D} = \frac{1-\cos\vartheta'}{sen\vartheta'} = tg\left(\frac{\vartheta'}{2}\right)}$$

Poiché: $\theta' + \phi = \pi \Rightarrow \theta' = \pi - \phi$ risulta

$$\boxed{tg\left(\frac{\vartheta'}{2}\right) = ctg\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{b}{D}}$$

Differenziamo la relazione trovata e otteniamo:

$$\boxed{\frac{db}{D} = -\frac{d\phi}{2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}$$

Questa relazione *permette di ricondurre il problema di sapere quante particelle* α *sono diffuse tra* ϕ e ϕ + dϕ *al problema di determinare quante hanno parametro d'urto fra b* e *b* + d*b*.

Si definisce *sezione d'urto differenziale* l'area della corona circolare compresa tra i parametri d'urto *b* e *b*+d*b*:

$$\boxed{d\Sigma = 2\pi b db}$$

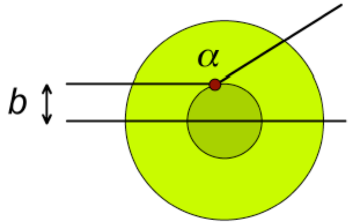

Fig.2

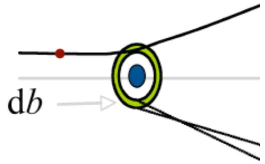

Fig.3

Sia h lo spessore della lamina sulla quale incidono le particelle α. Sia σ l'area sulla quale le α vanno a cadere realmente. Se n è il numero di nuclei per unità di volume, il numero totale d nuclei N_t è $N_t = n\,\sigma\,h$.
La probabilità che una particella α abbia parametro d'urto compreso tra b e b+db :

$$\boxed{P(b)db = \frac{\text{Area complessiva di tutte le corone circolari circondanti ogni nucleo}}{\text{Area totale su cui incidono concretamente le } \alpha} = \frac{N_t d\Sigma}{\sigma}}$$

Quindi la probabilità che la particella α possa essere deviata fra ϕ e ϕ + dϕ risulta:

$$\boxed{P(\phi)d\phi = -P(b)db = \frac{\pi}{2} nhD^2 \frac{\sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)} d\phi = \frac{\pi}{2} nh\left[\frac{2Ze^2}{M_\alpha \mathrm{v}^2}\right]^2 \frac{\sin\phi}{\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right)} d\phi}$$