Dal Pendolo al Caos : una introduzione allo studio dei sistemi dinamici

Fausto Borgonovi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Universitá Cattolica, Brescia

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Pavia

Il CAOS : la dipendenza sensibile dai dati iniziali

Un sistema classico di N particelle interagenti tra loro con una certa forza F evolve in accordo con le leggi della dinamica di Newton:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_i.$$

Questo significa che supponendo note le interazioni tra le particelle e date le condizioni iniziali sulle posizioni e sulle velocitá il moto é univocamente determinato. (Dal punto di vista matematico, ció deriva dai teoremi di esistenza e unicitá per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.)

Sogno deterministico di Laplace.

Da dove viene il caos, allora?

Le equazioni di Newton sono nonlineari e, in generale, presentano una forte (esponenziale) dipendenza dalle condizioni iniziali. In altri termini soluzioni con condizioni iniziali “vicine” si allontano l’una dall’altra esponenzialmente al passare del tempo.

Ma quella che é una semplice osservazione matematica viene ad avere importanti conseguenze fisiche. Infatti, dal punto di vista fisico, é impossibile determinare posizione e velocitá con ASSOLUTA PRECISIONE.

In altre parole, a parte le poche eccezioni costituite dai sistemi integrabili, il moto classico di N particelle puntiformi é, di fatto, non deterministico.

Effetto Butterfly

Un altra possibile fonte di caos é costituita dalla conoscenza effettiva di tutte le forze in gioco.

La complessa realtá fisica viene esemplificata con modelli matematici le cui soluzioni sono note esattamente. L'introduzione di altre piccole interazioni (perturbazioni) non sempre provoca una piccola deviazione dalla soluzione imperturbata. Puó capitare che l'aggiunta di una piccola perturbazione perturbi in modo consistente il moto rendendolo completamente diverso dal moto "matematicamente" perfetto (Effetto Butterfly).

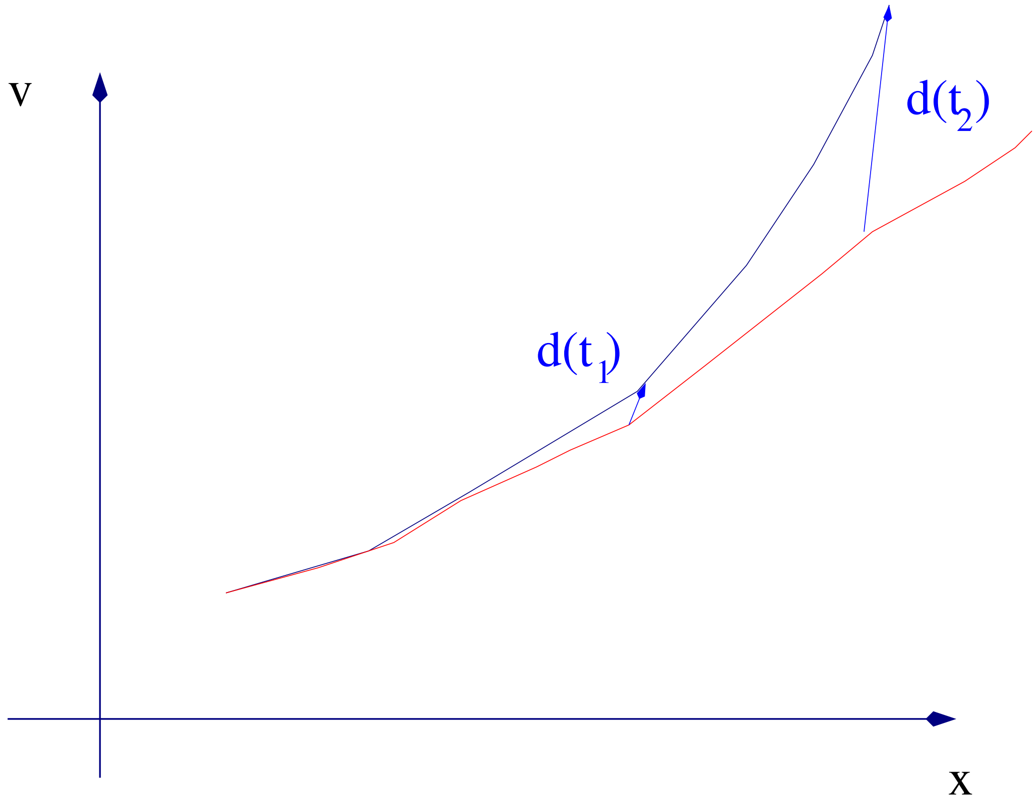
Il coefficiente di Lyapunov

Cosa significa, in pratica, dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali? Conviene passare alla descrizione nello spazio delle fasi. Si introduce, un vettore $\vec{u} = (..., x_i, y_i, z_i, v_i^x, v_i^y, v_i^z, ...)$ e si misura come cresce la sua distanza, nel tempo, da un vettore a lui vicino.

Dati $\vec{u}$ e $\vec{u}'$, sia $d(0) = ||\vec{u} - \vec{u}'||$ la distanza iniziale nello spazio delle fasi. Allora si trova che, in generale,

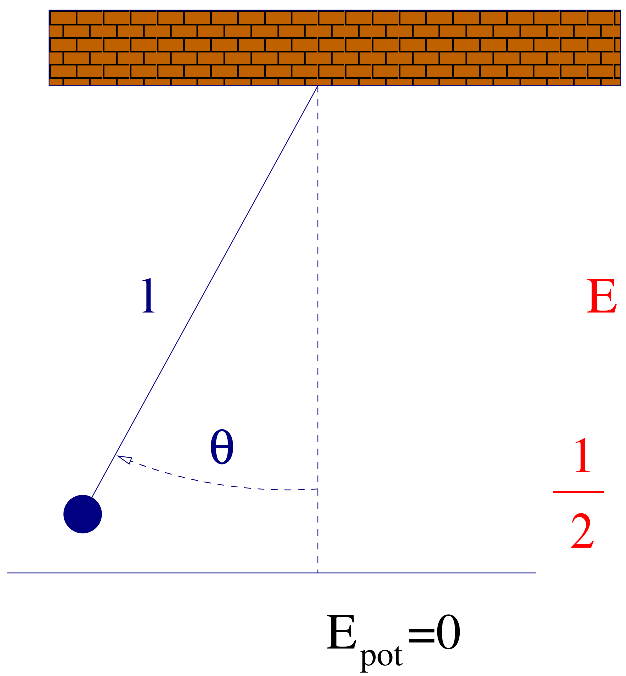
$$d(t) = d(0)\ e^{\lambda t}$$

ove λ é un coefficiente positivo, detto esponente di Lyapunov, che misura la divergenza esponenziale delle orbite. Fisicamente, l'"errore" iniziale nella determinazione del punto $d(0)$ viene amplificato esponenzialmente nel tempo fino a perdere completamente ogni memoria del dato iniziale.



Un esempio paradigmatico : il pendolo

Da dove nasce il caos?



$$E = E_{kin} + E_{pot} =$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgl(1-\cos\theta)$$

Riscrivendo in termini di quantitá di moto $p = mv$, si ottiene

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgl(1 - \cos\theta)$$

Fissare le condizioni iniziali su posizione e velocitá (o quantitá di moto) significa fissare il valore dell'energia E che si conserva durante il moto del sistema (legge di conservazione dell'energia).

Nello spazio (p, θ) una traiettoria ad energia $E = costante$ é l'unione delle due funzioni

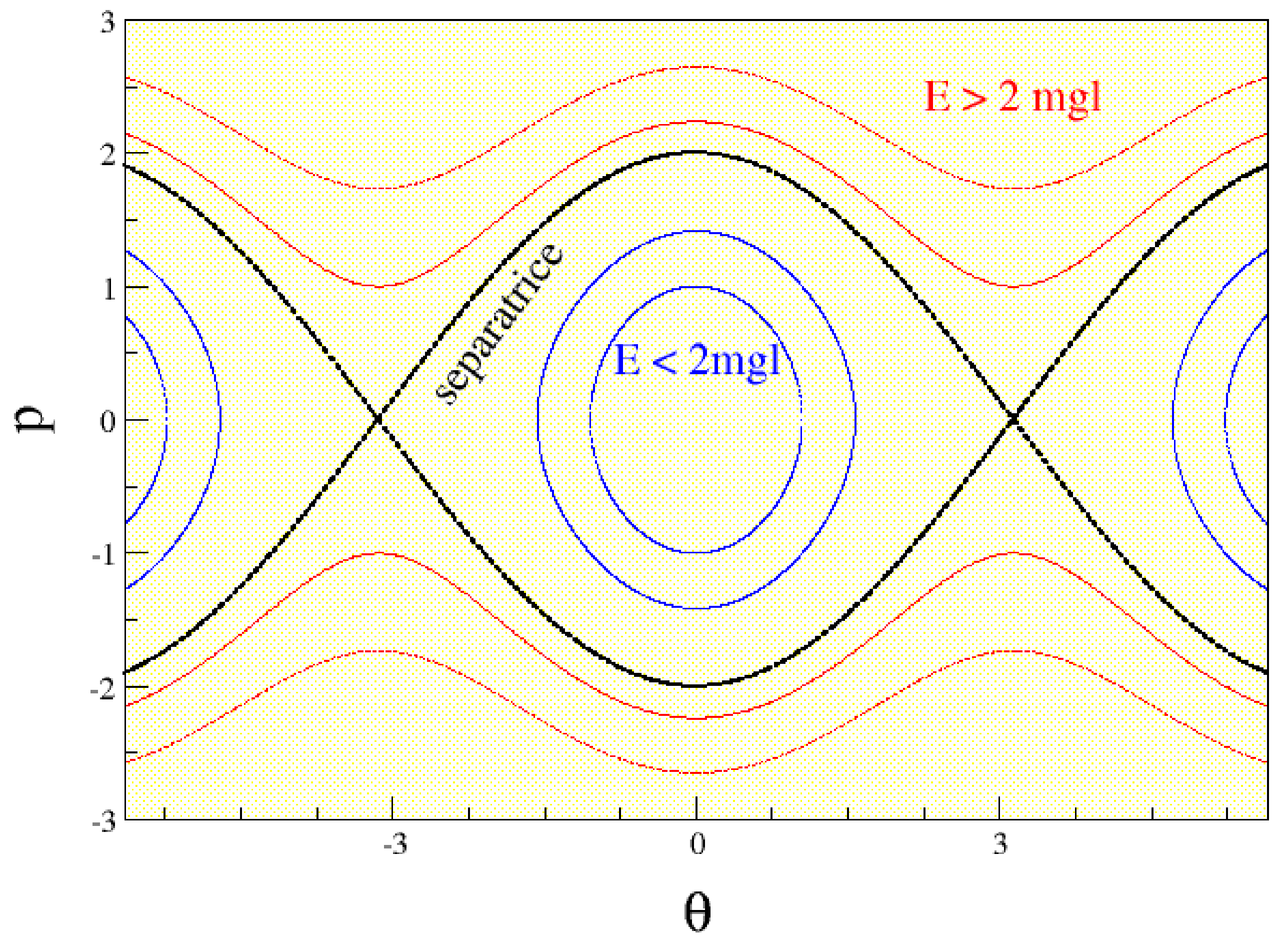
$$p = \pm\sqrt{2m[E - mgl(1 - \cos\theta)]}$$

Diversi tipi di traiettoria sono possibili a seconda del valore iniziale dell'energia.

Innanzitutto deve essere

$$E - mgl(1 - \cos\theta) > 0 \quad \text{ovvero}\ E > 0, \quad \text{poi, da}$$
$$\cos\theta > 1 - E/mgl \quad \text{si} \quad \text{ottiene} \quad \text{che}$$

1. per $1 - E/mgl < -1$ la soluzione esiste per ogni θ (moto illimitato di rotazione)
2. mentre per $0 < E < 2mgl$ la soluzione esiste solo per $\theta_1 < \theta < \theta_2$ (moto limitato di librazione).



E > 2 mgl
E < 2mgl
separatrice
p
θ
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
0
3

Osservazioni sui punti fissi

Vicino ai punti di equilibrio del potenziale il moto assume caratteristiche completamente diverse.

1. Attorno al punto di equilibrio stabile $\theta = 0$, per piccoli valori dell'energia, il punto descrive una ellisse centrata attorno al punto fisso.

2. Attorno al punto di equilibrio instabile $\theta = \pi$ si incrociano le separatrici che sono una idealizzazione matematica perché il punto necessita un tempo infinito per percorrere un'orbita completa.

Osservazioni sul caos

Le oscillazioni nonlineari del pendolo sono caotiche?

Ovviamente no.

Il sistema é assolutamente deterministico e la scelta delle condizioni iniziali, e quindi dell'energia, determinano in modo univoco l'evoluzione successiva. Il sistema si dice integrabile e ció accade perché il numero delle costanti del moto (l'energia E) é uguale al numero dei gradi di libertá (uno in questo caso).

Non c'é caos in una dimensione perché in ogni sistema meccanico soggetto a forze conservative l'energia si conserva.

I piú semplici sistemi caotici si otterranno quindi o aumentando le dimensioni (due gradi libertá come nel problema di Henon-Heiles), oppure introducendo il tempo (un grado e mezzo di libertá, ovvero la dinamica impulsata della mappa standard di Chirikov).

Noi seguiremo la seconda via, prima peró occorre definire il concetto di mappa.

Mappe

Una mappa é una applicazione da un certo dominio in sé. Prendendo in considerazione lo spazio delle fasi (p, θ) sará :

$$T : (-\infty, \infty) \times [0, 2\pi) \to (-\infty, \infty) \times [0, 2\pi)$$

Questa é detta mappa sul cilindro (per ovvie ragioni). Una mappa definisce una dinamica discreta, ovvero, con la notazione

$$T : (p, \theta) \to (p', \theta')$$

intendiamo che l'evoluto del punto dello spazio delle fasi (p, θ) dopo un certo periodo di tempo (da stabilire) é (p', θ').

Le mappe possono essere studiate dal punto di vista matematico. La matematica che ne risulta é una parte fondamentale nello studio dei sistemi dinamici. Noi peró procederemo in modo piú fisico partendo ancora dal pendolo, anzi, dai pendoli. Visto e considerato che il sistema piú piccolo dove studiare il caos ha due gradi di libertá (oppure uno piú il tempo, ma si puó dimostrare che i due sistemi sono dinamicamente equivalenti) consideriamo due pendoli, non interagenti, in condizioni di piccole oscillazioni attorno alle loro rispettive posizioni di equilibrio stabile. Ció equivale ad approssimare

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + mgl(1-\cos\theta) \approx \frac{p^2}{2m} + \frac{mgl}{2}\theta^2$$

Due pendoli avranno dunque una energia

$$E = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i g l_i \theta_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 x_i^2$$

dove si sono introdotte le variabili $\omega_i \equiv \sqrt{g/l_i}$ e $x_i \equiv l_i \theta_i$.

Le soluzioni sono le solite del moto armonico. Imponendo, ad esempio, come condizioni iniziali $x_i(0) = x_0^i$ e $p_i(0) = 0$, si ha

$$x_i(t) = x_0^i \, \cos \omega_i t$$

e siccome $p_i = m_i dx_i/dt$, é anche

$$p_i(t) = -m \, \omega_i \, x_0^i \, \sin \omega_i t$$

Eseguendo la seguente trasformazione (canonica) dalle variabili vecchie (p_i, x_i) a quelle nuove (I_i, ϕ_i) :

$$\begin{aligned} \frac{p_i}{\sqrt{2m_i}} &= -\sqrt{\omega_i I_i}\ \sin\phi_i \\ \sqrt{\frac{m_i\omega_i^2}{2}}\, x_i &= \sqrt{\omega_i I_i}\ \cos\phi_i \end{aligned} \qquad (1)$$

L'energia si scrive semplicemente

$$E = E_1 + E_2 = \omega_1\ I_1 + \omega_2\ I_2$$

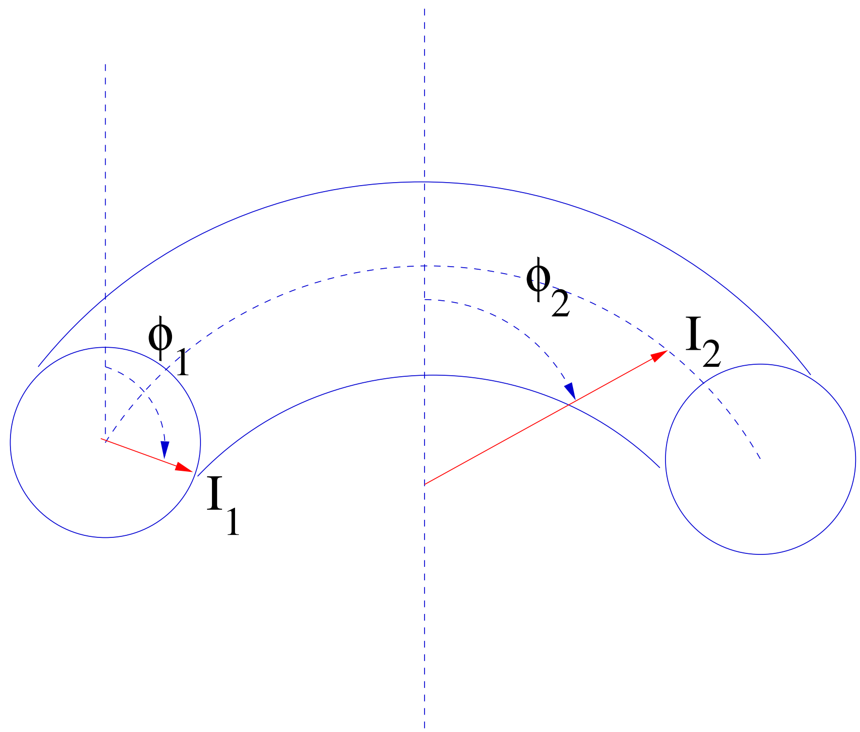
ovvero risulta dipendente dalle sole variabili (di azione) I_1, I_2 mentre risulta indipendente dalle altre variabili (di angolo) ϕ_1, ϕ_2. Siccome l'energia dei singoli pendoli é indipendente dal tempo, anche le azioni corrispondenti lo sono. Pe sapere come evolvono gli angoli ϕ_i, si osservi che

$$\tan \phi_i = -\frac{1}{\sqrt{2m_i}} \sqrt{\frac{2}{m_i \omega_i^2}} \frac{p_i}{x_i} = -\frac{p_i}{m_i \omega_i x_i} = \tan \omega_i t$$

Ovvero

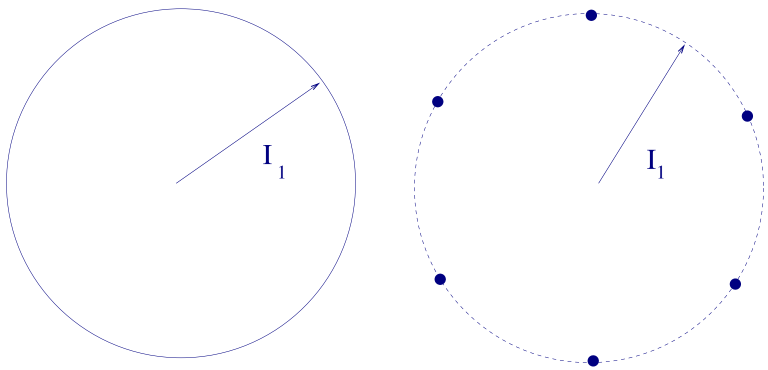
$$\begin{aligned} \phi_i &= \omega_i t \\ I_i &= \frac{E_i}{\omega_i} \end{aligned} \tag{2}$$

Le condizioni iniziali fissano i valori delle energie e quindi delle azioni mentre le fasi crescono linearmente nel tempo. Mentre i due pendoli oscillano indipendentemente, il punto rappresentativo si muove sulla superficie di un toro di sezione circolare i cui raggi sono i valori delle azioni (fissati una volta per sempre dalle condizioni iniziali).



Superfici di sezione di Poincarè

Si considerino le intersezioni del punto rappresentativo con un piano $\phi_2 =$ costante. Ogni volta che la traiettoria del punto rappresentativo attraversa il piano segneremo un punto. E' facile capire che sono possibili due soli tipi di moto : un cerchio ricoperto in modo denso, oppure una successione discreta (e finita) di punti (periodici).



che corrispondono rispettivamente al caso in cui il rapporto tra le frequenze dei due oscillatori é un numero irrazionale o razionale.

- Nel primo caso di parla di cerchio invariante e la superficie del toro é ricoperta densamente,
- nel secondo caso si parla di punti fissi periodici e l'orbita sulla superficie del toro é una curva chiusa.

E' possibile determinare, dati i valori (I_1, ϕ_1), delle intersezioni dell'orbita sulla superficie di Poincaré i valori dell'intersezione successiva : (I_1', ϕ_1')?

Tale associazione definisce una mappa:

$$T : (I_1, \phi_1) \rightarrow (I_1', \phi_1')$$

Nel caso specifico, una twist map

$$\begin{cases} I_1' = I_1 \\ \phi_1' = \phi_1 + \omega_1 \tau = \phi_1 + 2\pi \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \end{cases} \tag{3}$$

Ove $\tau = 2\pi/\omega_2$ é il tempo impiegato dal punto tra due intersezioni successive. Come si evince dall'equazione (3) la forma della curva dipende dal rapporto tra le frequenze $\alpha = \omega_1/\omega_2$ (detto numero di rotazione).

Ma questo é il caso integrabile, in cui il moto avviene sui tori invarianti. Cosa succede se si aggiunge una generica (anche piccola) interazione tra i pendoli? O meglio, cosa succede a cerchi invarianti e punti fissi?

Stabilitá dei punti fissi

I punti fissi sono di tue tipi, stabili ed instabili. Per studiarne la stabilitá occorre definire il concetto di mappa tangente.

Sia $\vec{x}_0 = (I_0, \phi_0)$ un punto fisso della mappa di ordine k, cioé $T^k(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$.

Sviluppando al primo ordine nell'intorno di $\vec{x}_0$ si ha :

$$T(\vec{x}) = T(\vec{x}_0) + \vec{\partial} T(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

ove

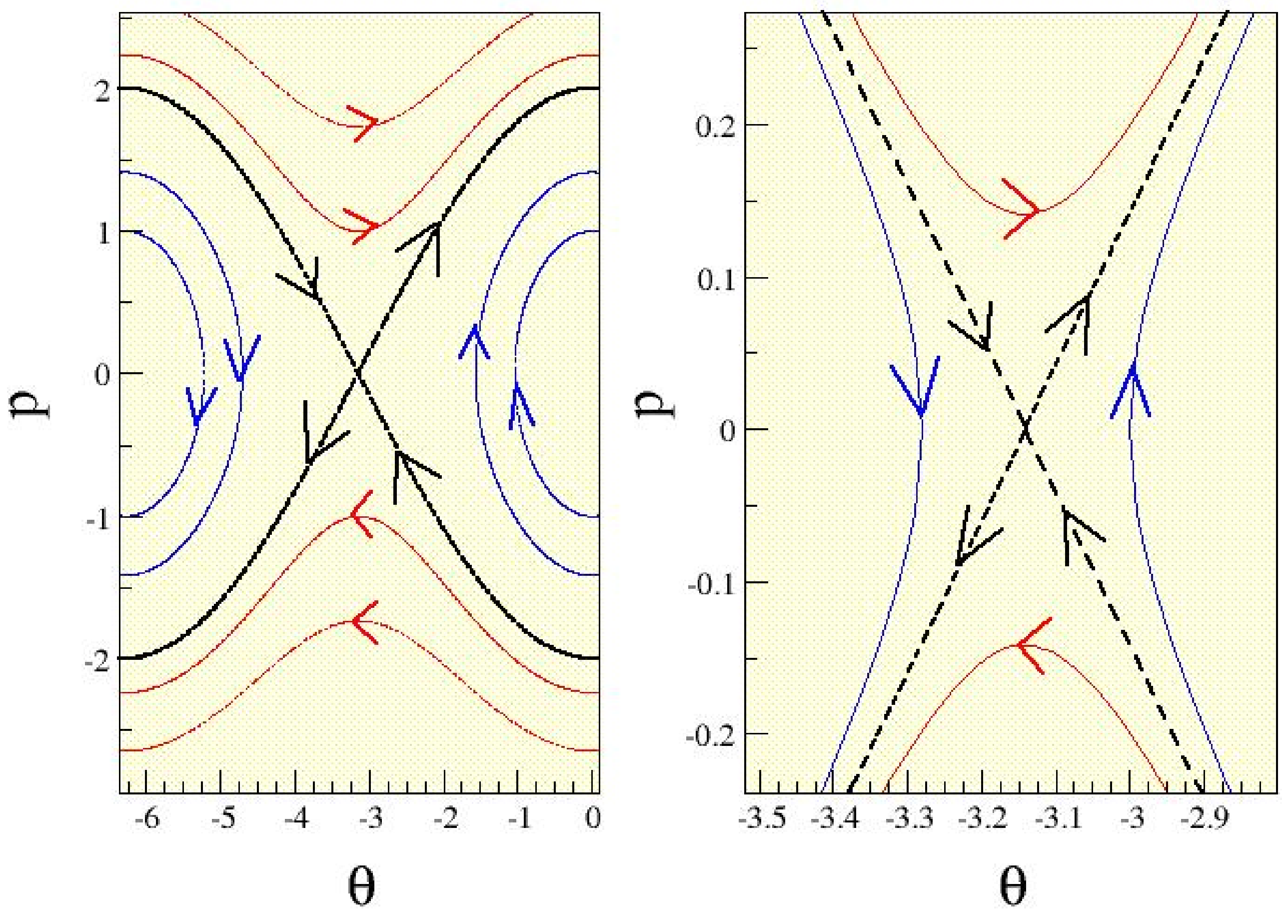
$$\vec{\partial} T(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial I'/\partial \phi & \partial I'/\partial I \\ \partial \phi'/\partial \phi & \partial \phi'/\partial I \end{pmatrix}_{(I_0, \phi_0)}$$

Gli autovalori della matrice $\vec{\partial} T(\vec{x}_0)$ si ricavano dall'equazione caratteristica, che é una equazione di secondo grado e quindi puó avere soluzioni reali o complesse coniugate.

Nel primo caso il punto fisso é instabile e il moto linearizzato nel suo intorno é iperbolico (ovvero tende ad allontanarsi dal punto stesso.)

Nel secondo caso il punto fisso é stabile ed il moto linearizzato segue orbite ellittiche chiuse attorno allo stesso.

Il caos nasce nell'intorno dei punti fissi instabili perché punti molto vicini ad essi divergono esponenzialmente (ovvero seguono la direzione dell'autovettore corrispondente all'autovalore positivo).


p
θ
2
1
0
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-3.5
-3.4
-3.3
-3.2
-3.1
-3
-2.9

Il teorema di Poincarè-Birkhoff e il teorema KAM

Anche per un sistema integrabile come il pendolo, punti vicini, nello spazio delle fasi al punto instabile $(p, \theta) = (0, \pi)$ tendono ad allontanarsi esponenzialmente (in termini semplici il pendolo puó cadere a destra o a sinistra).

Ma, quanti sono i punti iperbolici? E soprattutto quanto sono importanti?

A rispondere al primo quesito ci pensa il Teorema di Poincarè-Birkhoff, il quale afferma che sotto una qualsiasi piccola pertubazione regolare, una catena di punti fissi di ordine k si trasforma in una di ordine $2km$ ($m > 1$ é un numero intero) di cui metá stabili e metá instabili. Siccome i punti fissi esistono a tutti gli ordini k, vi é una proliferazione di punti fissi instabili in tutto lo spazio delle fasi.

E che ne é dei cerchi invarianti? Se la perturbazione é sufficientemente piccola il Teorema KAM (da Kolmogorov, Arnold e Moser) garantisce la loro sopravvivenza nella forma di tori invarianti deformati. Al crescere della perturbazione peró anche loro si distruggono per lasciare il posto ad oggetti matematicamente piú complessi (insiemi di Cantor) che possono essere schematizzati come tori con buchi (che dunque rendono possibile il moto attraverso essi stessi).

Per capire come si modifica le geometria dello spazio delle fasi prenderemo in esame un semplice sistema nonintegrabile (e caotico) che rappresenta una pietra miliare nello studio dei sistemi dinamici : la mappa standard di Chirikov.

La standard map

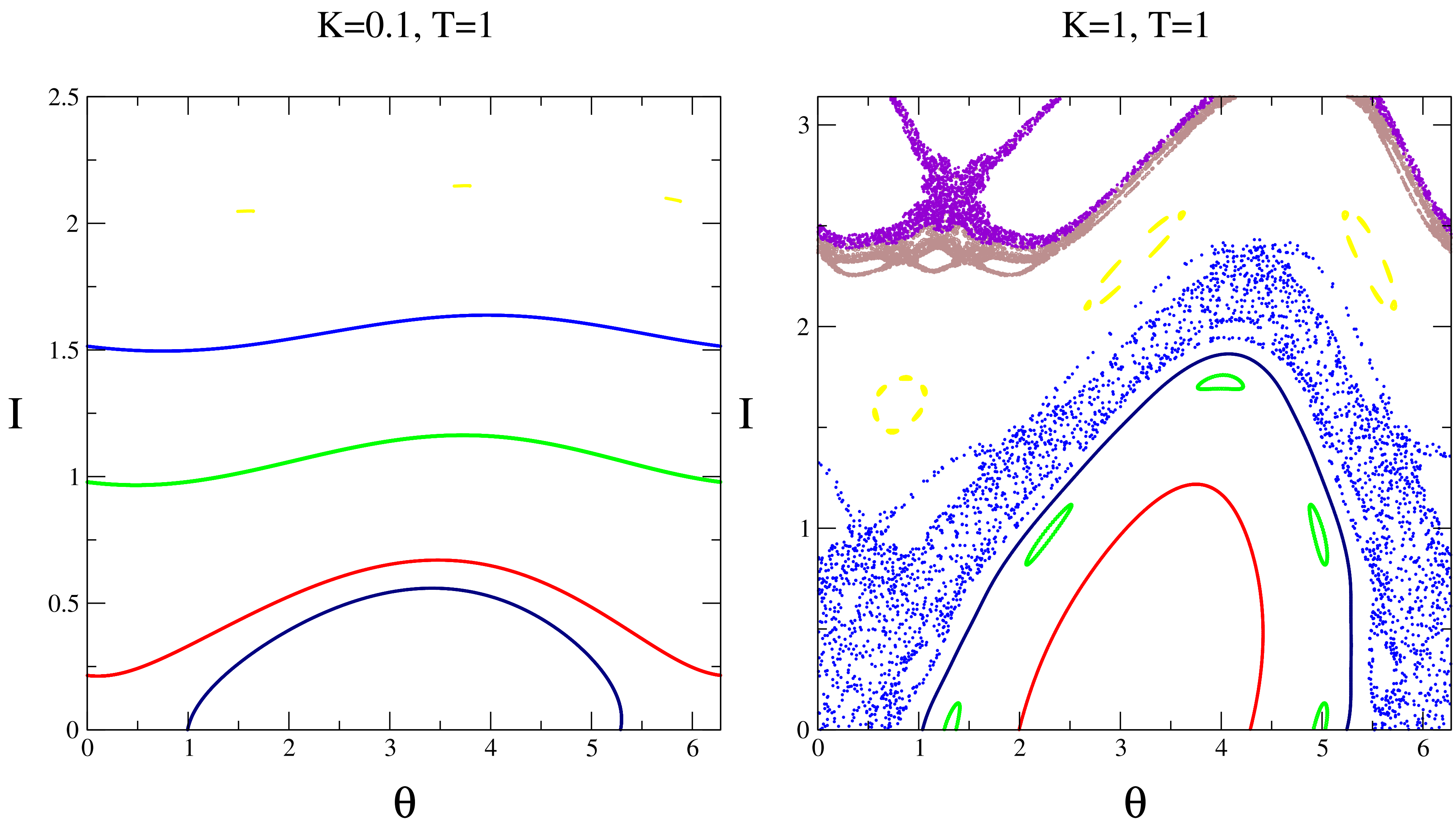
Fisicamente rappresenta un pendolo che ruota attorno ad un centro fisso che viene scalciato periodicamente, con periodo T, da una forza sinusoidale (ovvero da una energia potenziale del tipo $k\cos\theta$... come quella del pendolo). La mappa che descrive il comportamento delle variabili prima e dopo il calcio é :

$$\begin{cases} I' = I + k\sin\theta \\ \theta' = \theta + I'T \end{cases} \tag{4}$$

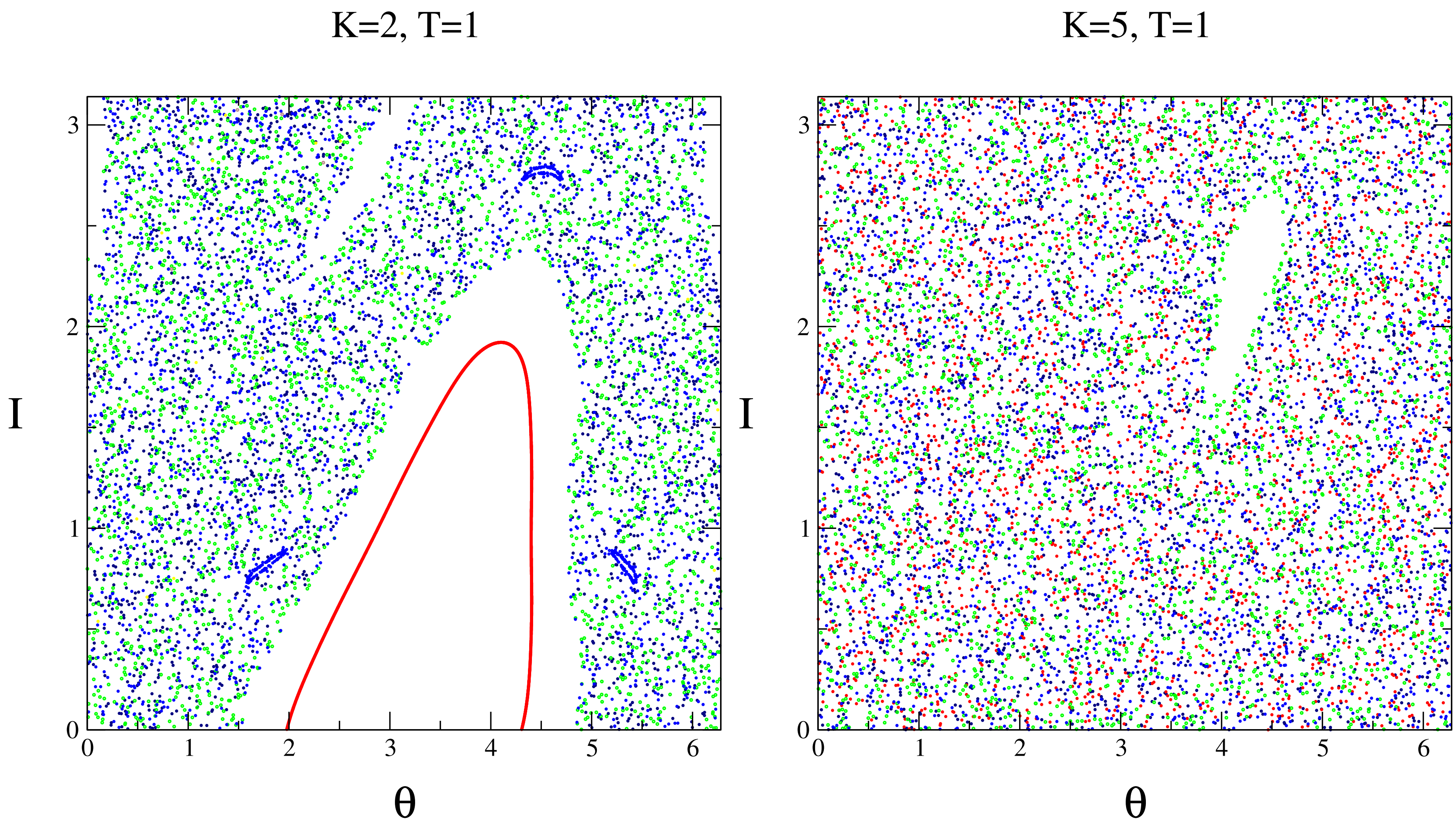
Un qualsiasi programma di calcolo permette di calcolare facilmente i nuovi valori di (I, θ), dati i vecchi valori. Ad ogni iterazione converrá anche prendere il valore di θ modulo 2π (visto che compare solo all'interno della funzione 2π periodica $\sin$). Inoltre é facile vedere che anche I puó essere preso modulo $2\pi/T$ visto che le equazioni (4) sono invarianti rispetto alla sostituzione simultanea $I \rightarrow I + 2\pi/T$ e $I' \rightarrow I' + 2\pi/T$. In questo modo si ottiene una mappa sul toro.

In seguito basta far disegnare, in un quadrato $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ un puntino ad ogni iterazione tenendo un solo colore per ogni diversa condizione iniziale.

Il parametro che descrive il grado di caos di questa mappa é il prodotto kT. Vediamo alcuni esempi.



K=0.1, T=1
K=1, T=1
I
θ
I
θ



K=2, T=1
K=5, T=1
I
θ
0
1
2
3
4
5
6

Sommario

Nello specifico, al crescere del parametro kT il moto dei punti nello spazio delle fasi tende a riempire in modo uniforme il toro. Piú esattamente é possibile dimostrare che il moto é diffusivo (ovvero lo spostamento quadratico medio dell'azione cresce come la radice quadrate del tempo esattamente come nel moto Browniano).

Questo significa che mentre non possiamo sapere dove sará un certo punto dopo 100 iterazioni della mappe, possiamo sapere, in media, di quanto si sposterá un insieme di punti con condizioni iniziali vicine. In altri termini possiamo dire come evolve la distribuzione iniziale dei punti.

Ancora una volta gli strumenti probabilistici diventano essenziali per descrivere in modo efficace questo semplice sistema.

Conclusioni

- Partendo da un semplice modello meccanico deterministico abbiamo analizzato come nasce il caos, ovvero l'incertezza, nelle previsioni del moto. Questo é assolutamente generale e dipende dalla nonlinearitá delle equazioni del moto di Newton.
- L'indeterminazione nella previsione del moto ci porta in modo naturale ad utilizzare l'analisi statistica per una previsione probabilistica relativa non al singolo evento, ma ad un insieme di eventi equivalenti.
- Gli strumenti probabilistici ancora una volta si rivelano essenziali per una descrizione esauriente della realtá fisica.